

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

Departamento de Física Teórica



---

**Cosmología No Estándar:  
Presente y Futuro del Universo**

---

**M<sup>a</sup> del Prado Martín Moruno**

**Director de Tesis:**

**Pedro F. González Díaz**

**Consejo Superior de Investigaciones Científicas**

**Instituto de Física Fundamental**

**Departamento de Partículas, Campos y Cosmología**



Madrid, 2010



# Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que han hecho posible la realización de esta tesis, ya sea por su comprensión o por su apoyo.

Agradezco a los directores de mi instituto haberme permitido trabajar en él, extendiendo este agradecimiento a todo el personal del CSIC que me ha proporcionado un ambiente de trabajo agradable, y tanto a la institución como al Fondo Social Europeo por haberme hecho beneficiaria de una beca predoctoral JAE.

Nunca podré agradecer lo suficiente a mi director de tesis la confianza que depositó en mí, su paciencia y su apoyo. Más allá de cumplir con sus funciones como director, Pedro González Díaz ha demostrado ser un maestro y una persona con el valor suficiente para mirar a la vida a la cara, manteniendo la entereza incluso en los momentos difíciles. Espero que pueda servirme de inspiración en el futuro y que tenga la suerte de conservar su amistad.

Quiero decir que no habría llegado a poder trabajar con Pedro González Díaz si no hubiera sido por la ayuda de José Antonio Jiménez Madrid. Aunque en ese momento era prácticamente un desconocido para mí, su pureza le llevó no sólo a pensar que todo el mundo necesita una oportunidad sino a ponerlo en práctica, guiándome en mis primeros pasos en la investigación. Gracias José Antonio, por ese acto desinteresado impagable y por haberme brindado tu amistad.

Por supuesto, también quiero agradecer a mis compañeros, los que son de mi grupo y los que se han comportado como tales, por haber compartido estos años conmigo y por, cada uno a su modo, haberme enseñado algo; en particular a Salvador Robles Pérez, compañero y amigo, por su paciencia, su apoyo y haber estado cerca siempre que lo he necesitado aunque en algunas ocasiones se encontrase físicamente lejos.

Deseo dar las gracias al grupo del Dipartimento di Scienze Fisiche de la Università degli Studi di Napoli Federico II que me recibieron con los brazos abiertos; en particular, a Salvatore Capozziello y Claudio Rubano, que me permitieron trabajar con ellos y aprender de ellos, y a Claudio Rubano y Paolo Scudellaro, cuyo apoyo e increíble hospitalidad me hicieron sentir como una más del grupo, aceptándome en su despacho

y en sus costumbres cotidianas.

Por supuesto, mi estancia en Nápoles no habría podido ser tan gratificante si no hubiera conocido a Marco S., Raffaele y Valentina, que comparten conmigo no sólo mi pasión por la física sino la devoción por la vida. A ellos les agradezco cada día que han hecho más interesante.

También quiero agradecer a Don N. Page el haberme dado la oportunidad de estar en el grupo del Department of Physics de University of Alberta, mostrar su disponibilidad para mis dudas científicas y abrirme la puerta de su casa, a Mary Jean Smallman su ayuda incansable, y a todo el grupo que me aceptó en su día a día.

Sin embargo, mi estancia en Canadá no habría podido ser tan satisfactoria en el ámbito profesional y personal si no hubiera tenido la suerte de residir en la casa de Phil y Marjie que sentí, durante dos meses, la mía propia. Le agradezco a ellos su afectividad, apoyo y respeto, a Giang el hacer cada día menos gris regalando sonrisas de forma desinteresada, y a Shima el haberme mostrado como la inteligencia puede emanar de la candidez. También quiero darle las gracias a David, que desde el primer día me ofreció su amistad desinteresada, y a Aditya, cuyo apoyo ha cruzado el oceano.

Tampoco quiero olvidar a Az-Eddine Marrakchi, quien me ha mostrado un significado más profundo de la palabra hospitalidad, y a Artyom Yurov, con quien, incluso sin conocerlo, he disfrutado especialmente trabajando. La pasión de ambos por la física me ha servido de motivación.

Por supuesto, no habría sido capaz de encontrar el equilibrio necesario para realizar el trabajo que ha supuesto esta tesis si no hubiera sido por mis amigas y amigos. En particular, Lola Pastor Rivera y Berta Álvarez Martín me han acompañado durante estos años, al igual que lo hicieran desde hace ya muchos, aumentando si cabe su apoyo y comprensión. Y, como no, qué habría sido de mí sin “el parque”, que aunque ya no resista físicamente sigue conservando su significado; por eso agradezco a Mercedes, Luis, Alberto, Miguel, María, Cora... y a todos los que han soportado mis devaneos con la física, como Gema, Soraya y Rubén. Por supuesto, también quiero dar las gracias a mi hermana Lola por confiar en que esto sería posible.

También quiero agradecer a una persona que, aunque no lo sepa, me influyó en gran medida para elegir este camino. Esta persona es Luis de Peña, mi profesor de física de COU, que espero siga motivando a sus alumnos.

Aunque, sin ninguna duda, las personas más decisivas en mi vida y mi trabajo han sido y serán mis padres, M<sup>a</sup> José Moruno García e Ignacio Martín Quevedo. A ellos, que me enseñaron a reflexionar sobre las distintas opciones que me da la vida y a elegir la que yo realmente quiera, sin preocuparse de lo insólita que pudiera ser mi

elección, y que me apoyaron cuando decidí realizar esta tesis, intentando hacer que las circunstancias mejorasen en todo lo que estaba en su mano, quiero dedicarles mi más profundo agradecimiento y este trabajo.

Sin embargo, esta dedicatoria deberán compartirla con Marco Tripodi, cuya paciencia y comprensión, sobre todo en estos últimos meses, me ha hecho vivir cada día en lugar de dejarlos pasar. Me resulta imposible agradecerle como se merece su decisión de seguirme en mis sueños ahora y en el futuro. Muchas gracias.

*...los años de investigación ansiosa en la oscuridad,  
con su anhelo intenso, su alternancia de confianza y la  
aparición final en la luz –sólo aquellos que lo han sufrido  
lo pueden entender.*

Albert Einstein

*El futuro, emocionalmente hablando, es más importante  
que el pasado, e incluso que el presente.*

Bertrand Russell



# Índice general

<b>Resumen (en inglés).</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>9</b>
1.1. Quintaesencia. . . . .	13
1.2. Energía fantasma. . . . .	15
1.3. Gas de Chaplygin. . . . .	19
1.4. Agujeros negros y energía oscura. . . . .	20
1.4.1. Evolución de los agujeros negros. . . . .	23
1.5. Energía fantasma y agujeros de gusano. . . . .	24
1.6. ¿Y si no es un fluido? . . . . .	30
1.6.1. Teorías de gravedad extendida. . . . .	31
1.6.2. Modelos de branas. . . . .	33
1.7. Síntesis de los contenidos de esta memoria. . . . .	34
<b>2. Energía oscura y evolución de objetos astronómicos.</b>	<b>39</b>
2.1. Acreción de energía oscura en agujeros negros. . . . .	41
2.1.1. Flujo de energía no-nulo: ¿Engullirá un agujero negro al Universo? . . . . .	45
2.1.2. Aproximación al caso cosmológico. . . . .	51
2.2. Acreción de energía oscura en agujeros de gusano. . . . .	58
2.2.1. Consideración de la reacción de la geometría. . . . .	64
2.3. Debate, consistencia de los resultados y nuevas líneas. . . . .	68
2.4. Conclusiones y comentarios finales. . . . .	74
<b>3. Nuevos fenómenos cosmológicos.</b>	<b>79</b>

3.1.	Sobre los posibles viajes del Universo. . . . .	81
3.1.1.	La energía fantasma dual y la posible discretización de $w$ . . . . .	82
3.1.2.	Sorprendentes consecuencias del proceso de acreción. . . . .	86
3.1.3.	Puentes al pasado y al futuro. . . . .	90
3.2.	Un final del mundo inesperado: la gran congelación. . . . .	93
3.2.1.	El futuro dictado por un PGCG. . . . .	94
3.2.2.	La consideración del dual no cambia el futuro. . . . .	98
3.2.3.	Otras consideraciones. . . . .	102
3.2.4.	¿Podemos escapar de la gran congelación? . . . . .	104
3.3.	Un universo de tantos. . . . .	106
3.3.1.	El multiverso oscuro. . . . .	108
3.3.2.	El universo observable. . . . .	112
3.3.3.	Posible conexión entre la física de partículas y la cosmología. . . . .	115
3.4.	Conclusiones y reflexiones. . . . .	119
<b>4.</b>	<b>Agujeros de gusano: Radiación térmica.</b>	<b>123</b>
4.1.	Conceptos previos . . . . .	126
4.1.1.	Agujeros de gusano de Morris-Thorne. . . . .	126
4.1.2.	Horizontes atrapantes . . . . .	129
4.2.	Formalismo de Hayward en agujeros de gusano M-T. . . . .	132
4.3.	Agujeros de gusano dinámicos . . . . .	136
4.4.	Radiación y termodinámica de los agujeros de gusano . . . . .	139
4.5.	Comentarios. . . . .	143
<b>5.</b>	<b>Sobre la equivalencia de esquemas.</b>	<b>149</b>
5.1.	Gravedad- $f(R)$ y simetrías Nöther. . . . .	151
5.2.	Modelo cosmológico- $f(R)$ con solución analítica. . . . .	153
5.3.	No equivalencia física de los esquemas. . . . .	159
5.3.1.	Esquema de Jordan versus esquema de Einstein. . . . .	161
5.4.	Conclusiones . . . . .	164
<b>6.</b>	<b>De Sitter: Nucleación de una burbuja</b>	<b>167</b>



6.1. Papel de $\Lambda$ en cosmología. . . . .	168
6.2. Foliación de un espacio de Sitter con una burbuja. . . . .	172
6.2.1. Nociones básicas. . . . .	174
6.2.2. Pegado de la burbuja. . . . .	175
6.2.3. Foliación mediante hipersuperficies CMC. . . . .	177
6.3. Comentarios. . . . .	185
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>187</b>
<b>Conclusiones (en inglés).</b>	<b>191</b>



# Abstract

The discovery of the cosmic acceleration indicated by the observational data [1; 2] has caused a break in the belief of what could be the matter content of the universe and what might be its possible future evolution. The interpretation of these data in the framework of General Relativity implies that the majority of the content in the universe should be a new stuff, which has been called dark energy.

Dark energy is a fluid which possesses anti-gravitational properties, i.e. the equation of state parameter of the dark energy must be  $w < -1/3$  ( $w = p/\rho$ ). Therefore, this fluid violates at least the strong energy condition [3].

It is even possible that the equation of state parameter is less than  $-1$ . In that case, the new stuff is known as phantom energy [4] and the consideration of this fluid could lead the universe to a catastrophic end by the appearance of a future big rip singularity [5; 6]. The big rip is a possible doomsday of the universe where both its size and its energy density become infinite. Nevertheless, it is known that a phantom universe must not necessarily finish in a doomsday if, for example, it has an equation of state of the form of a phantom generalized Chaplygin gas [7].

Owing to the strange properties of the phantom fluid, such as that its energy density increases with the scale factor, it seems quite natural that in a phantom universe some kind of cosmological objects even weirder than black holes may exist: traversable wormholes. These are short-cuts between two regions of the same universe or between two universes, which could be used to construct time-machines [8]. The reason for its strangeness is not only related to the bridge character they show, but also to that, in order to be traversable and stable, the wormholes must be surrounded by some kind of exotic matter which do not fulfil the null energy condition. The consideration of phantom models as the possible current description of the universe has caused a renaissance of traversable wormholes, since this fluid would also violate the null energy condition. Even more, it has been shown that an inhomogeneous version of phantom energy can be the exotic stuff which supports wormholes [9; 10; 11].

Dark energy, phantom or not, would therefore govern the future cosmic evolution,

provided that this stuff is not decaying in another kind of energy. But this is not the only way in which dark energy could decide the future of the universe, since it can influence the dynamic evolution of some astronomical objects in such a way that they could even produce cosmological effects. On one hand, dark energy should be accreted onto black holes in a different way that ordinary matter does, since that new fluid covers the whole space. Therefore, the study of dark energy accretion onto black holes becomes an interesting field of study which could lead to surprising effects as the possible disappearance of black holes in a phantom environments [12]. On the other hand, in some cosmological models the accretion of phantom energy onto a wormhole could lead to an enormous growth of its mouth, which becomes so big that it is able to engulf the whole universe which would then become capable to travel through it in a big trip [13], avoiding the big rip singularity.

In this dissertation we present the study of new phenomena related to the accelerated expansion of the universe under the assumption that dark energy is the responsible of such acceleration. Those new phenomena could be due: to the behavior of the universe itself, in some dark energy models, to the wormhole physical properties, or to the influence that black- and worm-holes could have at cosmological scales.

Firstly, we deal with the accretion processes onto black- and worm-holes. The interesting results obtained about these processes in black holes [14] and wormholes [13] have been reconsidered when some approximations are suppressed.

So, we extend the Babichev-Dokuchaev-Eroshenko model for the accretion of dark energy onto black holes, [14], to a non-static black hole case [15]. The possibility that a black hole with large mass will rapidly increase and eventually engulf the Universe at a finite time in the future is studied by using reasonable values for astronomical parameters. We conclude that, in this framework, such a phenomenon is forbidden for all black holes in 4-dimensional cosmological models [16]. We also include a first step in the consideration of the cosmological effects on that process, by using a generalized Schwarzschild-de Sitter metric [17]. In this case, the mentioned effects could magnify the black holes growth.

Regarding the dark energy accretion onto wormholes, we also generalized the study of Ref. [13], dealing with a non-static metric. We reach the conclusion that the big trip process can actually occur, by using a method that now entails less approximation than in the black hole case [18].

Secondly, we consider some new phenomena which could be decisive in the future of the universe by studying some cosmological models and the implications of the accretion process in such models.

In particular, we discuss on new cosmic solutions describing the early and late

evolution of a universe that is filled with a kind of dark energy. Those models, [19], are obtained considering a dark energy fluid with a constant  $w$  in an scenario inspired in a Randall-Sundrum type 1 scenario [20]. The main distinctive property of the resulting space-times is that they make to appear twice the single singular events predicted by the corresponding dark energy models with  $w < -1$  ( $w > -1$ ), in a manner which can be made symmetric with respect to the origin of cosmic time. We also consider dark energy and phantom energy accretion onto black holes and wormholes in the context of these new cosmic solutions. It is seen that the space-times of these holes would then undergo swelling processes leading to big trip and big hole events taking place on distinct epochs along the evolution of the universe. In this way, the possibility is considered that the past and future be connected in a non-paradoxical manner in the universes described by means of the new symmetric solutions.

Since it has been believed that models with phantom generalized Chaplygin gas (PGCG) do not contain singularities, we study next different PGCG models, reviewing what were previously studied [7]. We show that a PGCG model can present a future singularity in a finite future cosmic time [21; 22]. Unlike the big rip singularity, this singularity happens for a finite scale factor, but like the big rip singularity, it would also take place at a finite future cosmic time. In addition, we consider a Randall-Sundrum type 1 brane-world scenario, [20], where a dual of the generalised phantom Chaplygin gas (DPGCG) can be defined. We also show that the same kind of singularity at a finite scale factor can take place in this scenario [21; 22]. Whereas in the corresponding PGCG models the new singularity could be avoided by a big trip phenomenon, in the DPGCG that phenomenon would be absent [16].

We also present cosmic solutions corresponding to universes filled with dark and phantom energy, all having a negative cosmological constant [23]. All such solutions contain infinite singularities, successively and equally distributed along time, which can be either big bang/crunches or big rips singularities. Classically, these solutions can be regarded as associated with multiverse scenarios, being those corresponding to phantom energy that may describe the current accelerating universe. The physical characteristics of that phantom classical multiverse scenario enable us to advance the following conjecture: whereas the physics of particles and fields is confined to live in the realm of the whole multiverse formed by finite-time single universes, that for our observable universe must be confined just in one of the infinite number of universes of the multiverse when such a universe is consistently referred to an infinite cosmic time. If this conjecture is adopted then some current fundamental problems that appear when one tries to make compatible particle physics and cosmology can be solved in this toy model [24].

Third, we consider the possible thermal emission made up of some sort of phantom radiation coming out from the wormhole and the formulation of the three main laws of wormholes thermodynamics [25; 26]. These results are obtained by analyzing the Hayward formalism of spherically symmetric solutions containing trapping horizons [27; 28], the mentioned phenomenon of phantom accretion onto wormholes and the development of phantom thermodynamics [29; 30].

Fourth, although we are considering that general relativity must be the theory which governs the gravitational interactions, there is another line of thinking which defends the necessity of modifying Einstein theory. In particular, we consider  $f(R)$ -gravity. Due to the mathematical equivalence of both frames, being related under conformal transformations, we study if such transformation would also imply a physical equivalence. With this purpose, we present a  $f(R)$ -cosmology with an exact analytic solution, coming from the request of the existence of a Noether symmetry [31], which is able to describe a dust-dominated decelerated phase before the current accelerated phase of the universe [32]. We compare this model with the corresponding model in the Einstein frame, related to each other by a conformal transformation, by obtaining observable physical quantities in both frames [33]. Since such observable quantities are different, both frames are not physically equivalents and one must decide what is the physical frame in order to discuss the results.

Fifth, we try to understand the reasons which could be behind the distrust about the cosmological constant as responsible of the cosmic acceleration. With this aim in mind we discuss the origins of the cosmological constant, pointing out the different attempts for its revival, and briefly mentioning some possible theoretical problems related with it. Nevertheless, if the reader want to insist in the consideration of this constant, then he/she must take into account that the universe will, in this case, develop into a de Sitter model. Far from implying a calmed future for such a model of the universe, in this scenario some phenomena could appear which are even more surprising than those discussed in this dissertation for the dark energy case; in particular, the nucleation of a Coleman-De Luccia bubble [34]. We present some preliminary results about the possible foliation of a de Sitter spacetime containing a de Sitter bubble in its interior, with a different value for the cosmological constant, by using constant mean curvature (CMC) hypersurfaces. In particular, we study in detail a foliation of this kind, showing that, in some cases, it can cover the existence of observers like us. We also include an argument which could help us to find other CMC foliations.

Finally, we summarize the conclusions of this dissertation.

# Capítulo 1

## Introducción.

La expansión acelerada del Universo actual se ha convertido ya en un hecho mayoritariamente aceptado por la comunidad científica, aunque la interpretación del origen de dicha aceleración parece estar aún muy lejos de haber alcanzado un consenso suficiente. La dificultad principal no es sólo que el agente responsable de dicha aceleración sea desconocido todavía, sino que si consideramos que las leyes de la física a gran escala están gobernadas por la relatividad general, este agente debe tener propiedades nunca vistas en el mundo que nos rodea, lo que podría llevar a la aparición de fenómenos físicos inesperados.

Hasta ahora la cosmología se sostenía en tres pilares básicos considerados inamovibles. El primero se basa en la hipótesis de que la teoría que rige la dinámica del Universo es la misma teoría que se encarga de describir cualquier fenómeno gravitatorio, es decir, la relatividad general, lo que nos permite considerar a nuestro Universo como un ente espacio-temporal. En segundo lugar se encuentra el llamado principio cosmológico que nos dice que el Universo es homogéneo e isótropo a gran escala, proporcionándonos una forma general de la métrica que describe nuestro espacio-tiempo.

La combinación de estos dos supuestos nos permite estudiar la dinámica del Universo considerando que el espaciotiempo tiene una cierta curvatura espacial y teniendo en cuenta que el tensor energía-momento que aparece en el lado derecho de las ecuaciones de Einstein describiendo un contenido material del Universo, según el principio cosmológico, corresponde a un fluido perfecto para el que la densidad de energía y la presión sólo dependen del tiempo cósmico.

El último de los tres pilares en los que se sustenta la cosmología moderna se refiere a la adopción de ciertas desigualdades, llamadas condiciones de energía, que el tensor de energía-momento debería cumplir para poder ser considerado como una cantidad *razonable físicamente*.

Las condiciones de energía [3] se postularon con el fin de restringir la libertad en la forma del tensor energía-momento conforme a nuestro conocimiento del mundo que nos rodea, descartando así posibles soluciones de las ecuaciones de Einstein carentes de significado físico.

De este modo, la llamada condición de energía débil demandaría que cualquier observador u observadora tendría que medir una densidad de energía necesariamente no-negativa, lo que en el caso cosmológico de un fluido perfecto implicaría que tanto la densidad de energía medida en una base ortonormal, que se puede llamar simplemente densidad del fluido  $\rho$ , como la suma de ésta más la presión definida en la misma base,  $p + \rho$ , fueran ambas no-negativas (donde, por supuesto, se consideran unidades tales que la velocidad de la luz es igual a la unidad). La condición de energía nula no es más que un caso particular de la débil y, para que se cumpla en el caso de un fluido perfecto, bastaría con requerir la segunda de las dos condiciones mencionadas.

Otra condición aun más restrictiva es la condición de energía dominante, que no sólo requiere que cualquier observador u observadora debe medir una energía local no-negativa, sino también un vector de flujo de energía local que no sea de tipo espacio. Dicha condición implicaría en el ámbito cosmológico que la densidad de energía del fluido perfecto fuera no-negativa y que el valor máximo que podría tomar el valor absoluto de la presión de este fluido habría de igualar a esta densidad de energía.

La última condición que parecería razonable imponer al tensor energía-momento es que la gravedad debería ser siempre atractiva, lo cual implicaría para un fluido perfecto que tanto la suma de la densidad de energía más la presión,  $\rho + p$ , como la de la densidad de energía más tres veces la presión,  $\rho + 3p$ , deben tomar valores no-negativos. Esta condición se conoce como la condición de energía fuerte y su vigencia implicaría la condición de energía nula pero no necesariamente las demás.

La revolución llegó en forma de un conjunto de datos observacionales que pusieron de manifiesto que la geometría espacial del Universo es aproximadamente plana [35], como ya había pronosticado el esquema inflacionario, y que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada [1; 2]. Mientras que por sí solo el primero de estos descubrimientos simplemente nos limitaría a ciertos modelos particulares de los predichos en el marco anteriormente mencionado, la expansión acelerada del Universo ha hecho tambalearse la construcción cosmológica preexistente. La necesidad de revisión del esquema previo se hace fácilmente comprensible al notar que un universo relativista que cumple el principio cosmológico y cuyo contenido material curva el espaciotiempo de forma tal que origina un efecto atractivo, sufrirá necesariamente una deceleración en su velocidad de expansión. En otras palabras, la relatividad general, según la cual no sólo la densidad de energía sino también la presión son fuentes gravitatorias, implica



que la aceleración de la expansión de un universo homogéneo e isótropo es directamente proporcional a menos la suma de la densidad de energía más tres veces la presión del fluido perfecto,  $-(\rho + 3p)$ , por lo que un universo acelerado debe contener un material que viole necesariamente la condición de energía fuerte.

La propuesta más económica que en principio podría explicar este desacuerdo entre la teoría y los datos observados consiste en resucitar la constante cosmológica una vez más. La constante cosmológica fue introducida originariamente por Einstein en 1917 con el fin de convertir su teoría en una capaz de modelar el universo estático en el que él creía. Así, introduciendo esta corrección que se podría interpretar como la energía del vacío correspondiente a la parte geométrica de sus ecuaciones, pudo compensar la fuerza gravitatoria que originaría la materia en un universo cerrado dándole un valor particular a este término constante que, al ser considerado positivo, tenía un efecto repulsivo. Aunque el propio Einstein se vio obligado a re-formular su teoría de la constante cosmológica por las observaciones realizadas por Hubble (1929), que evidenciaban que nos encontramos en un universo en expansión, y la demostración de Eddington de que su modelo era violentamente inestable (1930), la constante cosmológica siguió siendo el recurso utilizado para la descripción de fenómenos o correcciones aparentemente inexplicables dentro de la teoría, para acabar una y otra vez desterrada en el olvido, al alcanzarse un mejor conocimiento sobre el problema, obtener datos más precisos en las observaciones o, simplemente, no alcanzar los propósitos para los que fue introducida<sup>1</sup>. De esta forma, el que Einstein considerara su “mayor error” ha sido uno de los errores más repetidos por la comunidad científica desde entonces. Por supuesto, es posible, e incluso se podría decir muy probable, que ahora sí que nos encontremos ante el fenómeno que hace legítima la consideración de la constante cosmológica y que nuestro Universo vaya a expandirse de forma acelerada eternamente pero, ya que no es ni mucho menos la única posibilidad permitida por las observaciones, es necesario explorar otras opciones que además puedan eludir ciertos problemas fundamentales asociados a esta constante.

Se ha mencionado ya que para poder describir un universo en expansión acelerada homogéneo e isótropo por medio de la relatividad general, la condición de energía fuerte debe ser violada<sup>2</sup>. Para ello se ha considerado la denominada energía oscura [36; 37], cuyo nombre parece provenir del hecho de que sólo es observable por medio de sus efectos gravitatorios, como un fluido que viola dicha condición. Las observaciones anteriormente mencionadas, [1; 2], indican que la proporción de energía oscura debería

---

<sup>1</sup>Una discusión algo más extensa sobre los orígenes y usos históricos de la constante cosmológica será incluida en Capítulo 6.

<sup>2</sup>Por supuesto las condiciones de energía antes aludidas no son las únicas que se ponen en juego en el marco cosmológico y otras opciones han sido barajadas a este respecto.

situarse en torno al 74 % del contenido energético del Universo. Obviamente, la constante cosmológica es un caso particular de energía oscura, el caso en el que ésta no sufre evolución dinámica ya que la presión es igual a menos la densidad de energía, por lo que también viola la condición de energía fuerte<sup>3</sup>.

La energía oscura es por tanto un fluido desconocido que en general corresponde a una densidad de energía dinámica, cuyo efecto repulsivo en la evolución del universo es consecuencia de su presión negativa y que, al menos aproximadamente, se distribuye de forma homogénea e isótropa por todo el espaciotiempo. Este fluido adopta un papel protagonista en la dinámica del universo, no sólo porque en el presente sea la sustancia dominante, sino porque dada su ecuación de estado efectiva su densidad de energía decrecerá más lentamente que la densidad de energía de las sustancias conocidas al expandirse el universo, con lo que su dominio será cada vez mayor siempre que no interactúe con otras sustancias<sup>4</sup>.

Observaciones independientes, tales como las relativas al fondo cósmico de microondas [38; 39; 40] o la estadística de cúasares [41], han confirmado la predicción sobre la expansión acelerada pronosticada por los primeros análisis en las Supernovas distantes de tipo Ia [1; 2] y posteriores [42; 43; 44]. Es más, el concurso combinado de varios métodos [45; 46] ha ayudado a restringir el rango de los parámetros cosmológicos e incluso se han detectado nuevos efectos relacionados con su presencia [47; 48; 49] (véase la Fig. (1.1)). En la actualidad se considera que el Universo está formado aproximadamente por un 74 % de energía oscura, un 22 % de materia oscura y un 4 % de materia bariónica y que el parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura,  $w = p/\rho$ , debe tomar valores cercanos a  $-1$ , no excluyéndose un posible carácter dinámico de éste (véase [50] para encontrar valores actualizados del WMAP así como su combinación con otras observaciones).

---

<sup>3</sup>La violación de esta condición no es una consecuencia de la consideración de la constante cosmológica como un fluido que, como ha sido indicado en la literatura, no está completamente bien definida. Se puede ver [3] que el cálculo de la condición de energía fuerte en el caso en el que las ecuaciones de Einstein contienen un término cosmológico implica que esta condición será violada siempre que la constante cosmológica sea positiva y suficientemente grande como para contrarrestar los efectos del resto del contenido material del universo causando una aceleración en la expansión de éste.

<sup>4</sup>Se suele considerar que la energía oscura sólo produce efectos gravitatorios, ya que su interacción con sustancias conocidas originaría algún tipo de “nueva fuerza” que debería ser observable. Por tanto, en este marco teórico, la única posibilidad de que la suerte de nuestro universo no sea decida por la energía oscura sería si entrara en juego una interacción que diera lugar a un posible decaimiento de esta energía en materia oscura, también de naturaleza desconocida. La dificultad en este caso consiste en determinar el tipo de fuerza capaz de originar esta interacción.

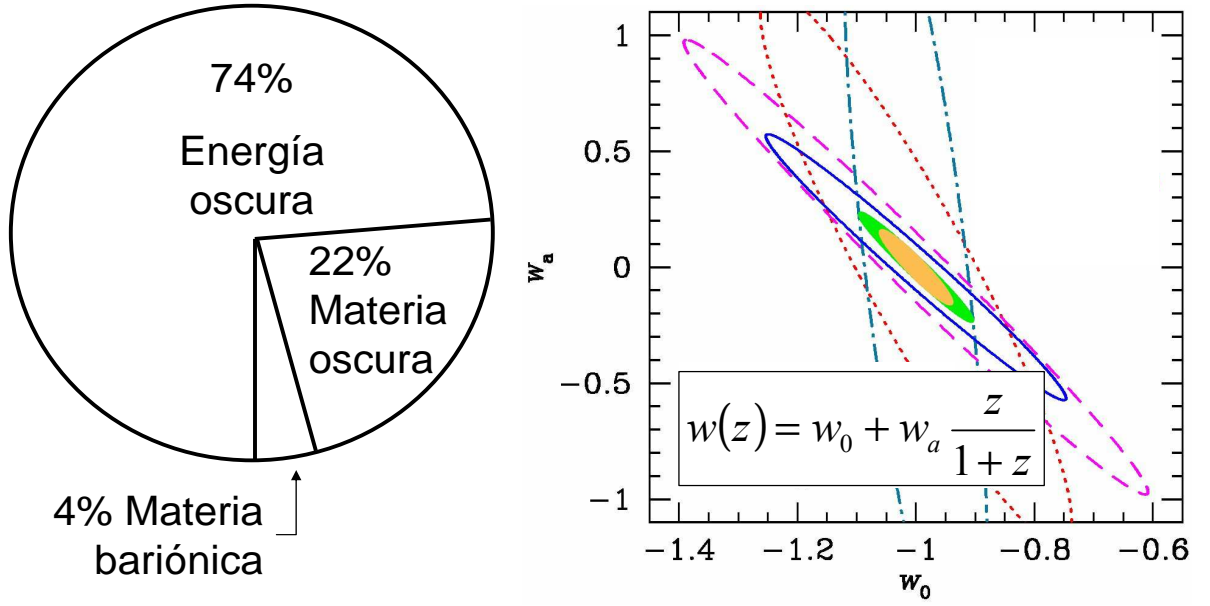


Figura 1.1: A la izquierda representamos un diagrama del contenido aproximado actual de nuestro Universo. A la derecha incluimos una figura tomada de la Ref. [51] en la que se muestran los valores de  $w$  compatibles con distintos datos observacionales.

## 1.1. Quintaesencia.

La presión de la energía oscura debe ser lo suficientemente negativa como para causar la aceleración actual del universo, pero, si en la medida de lo posible quisiéramos mantener el esquema cosmológico pre-aceleración, tendríamos que considerar que esta presión debería ser tal que no diera lugar a violaciones del resto de las condiciones de energía, lo cual implicaría un parámetro de la ecuación de estado  $w > -1$ . Los modelos de quintaesencia, bautizados como tales por Caldwell, Dave y Steinhardt en Ref. [52], tienen este perfil. Inspirados en el modelo del inflatón, responsable de la dinámica inflacionaria, ya fueron considerados en mayor o menor medida antes del descubrimiento de la expansión acelerada con motivaciones provenientes de la física de partículas [53], para reconciliar las estimaciones del parámetro de la densidad de energía con la predicción de un universo plano proveniente del esquema inflacionario [54] o ambas cosas [55].

En los modelos de quintaesencia se considera un campo escalar con un término cinético canónico, cuya masa y acoplos con otros campos son despreciables y que puede ser interpretado como un fluido perfecto con presión negativa. Aunque en principio dicho campo podría estar distribuido en el espacio de forma inhomogénea, las fluctuaciones con respecto a la homogeneidad deberían ser despreciables a escalas cosmológicas

para respetar el principio cosmológico<sup>5</sup>, por lo que se suele considerar que este campo es homogéneo. La descripción de la energía oscura mediante un campo escalar podría sugerir un origen más fundamental para la misma o al menos la posibilidad de que fenómenos subyacentes desconocidos se pudieran describir de forma efectiva mediante dicho campo. Si la energía oscura estuviera modelada por un fluido cuyo parámetro de la ecuación de estado fuera constante, nuestro universo se expandiría eternamente con una aceleración menor que la de un modelo en el que la energía oscura fuera una constante cosmológica. Si por el contrario consideráramos un modelo quintaesencia en el que  $w$  disminuyera hasta el valor límite  $-1$ , un campo que alcanzase el mínimo local de su potencial, la expansión de este modelo sería tal que tendería a un comportamiento exponencial. De esta forma, si consideramos que la quintaesencia no interacciona con otros campos, el futuro del universo sería en cualquier caso una expansión acelerada perpetua más rápida que el crecimiento de la esfera de Hubble, de la que empezarían a desaparecer las galaxias convirtiendo al universo observable fuera de nuestro grupo gravitatorio (la unidad cosmológica en la que nos encontramos) en un gran desierto lleno tan solo de energía oscura.

Por otro lado, dado que en las ecuaciones cósmicas la descripción de la energía oscura por medio de un campo es equivalente a la consideración de un fluido perfecto, nos bastaría conocer el valor del parámetro de la ecuación de estado y unas ciertas condiciones iniciales para estudiar la dinámica del universo. De esta forma, parecería existir una cierta degeneración entre los modelos de quintaesencia y los modelos de  $k$ -esencia [56], en los que la presión negativa es resultado de la consideración de un término cinético no canónico, capaz de describir el mismo fluido, es decir, la misma presión y densidad de energía. Sin embargo, si se considerase esta descripción en términos de campos como subyacente al fluido, la llamada ecuación de estado de la energía oscura se convertiría en una descripción fenomenológica; por lo tanto, tal como muestra un estudio más profundo de estos modelos llevado a cabo en la Ref. [57], la velocidad del sonido en cada caso sería diferente (siendo en el caso de la quintaesencia igual a la unidad), pudiendo influir las fluctuaciones del fondo cósmico de microondas de forma diferente.

---

<sup>5</sup>En los casos en los que se considera un campo espacialmente inhomogéneo se puede definir una densidad de energía y presión medias del fluido, completando el estudio mediante la consideración de las perturbaciones de estas cantidades originadas por las fluctuaciones del campo.

## 1.2. Energía fantasma.

Acabamos de ver como la modificación de uno de los pilares mencionados al comienzo de esta introducción podría proporcionar una explicación satisfactoria de las observaciones, cambiando en cierta medida (o en gran medida comparando con modelos pre-aceleración cerrados) las previsiones sobre el futuro de nuestro Universo. El precio que hemos pagado para ello ha sido ampliar nuestra concepción de lo que es una sustancia razonable físicamente, ya sea entendida como una realidad en sí misma o como la manifestación de algún efecto desconocido que debe ser estudiado.

Lo que vamos a considerar a continuación guarda una relación formal con el dilema que se presenta cuando se trata de reparar un edificio dañado en uno de sus pilares, lo cual puede en efecto, llevarse a cabo o bien mediante pequeñas modificaciones o sencillamente delimitando el pilar dañado de forma controlada, Esta última opción es en general la más conveniente. Análogamente, en la cosmología actual, una vez permitidas violaciones de la condición de energía fuerte nada nos debería impedir revisar el resto de las condiciones de energía siempre que las violaciones resultantes fueran controladas; es decir, siempre que se tenga en cuenta que estas condiciones son premisas necesarias en la demostración de ciertos teoremas de la física relativista [3], con lo que su violación podría dar lugar a fenómenos inesperados.

Poco después de que existiera una evidencia suficiente sobre la aceleración del Universo, Starobinsky consideró [5] las diferentes posibilidades sobre el futuro de nuestro Universo consistentes con este nuevo fenómeno, aunque advirtiendo sobre la posible pérdida de fiabilidad de los modelos a tiempos infinitamente grandes. Una de estas posibilidades era la formación de una singularidad clásica de tipo espacio en el futuro que podría ser originada, entre otras causas, si el fluido a considerar en nuestro universo tuviera un parámetro de la ecuación de estado constante y menor que  $-1$ , violando, por lo tanto, todas las condiciones de energía anteriormente mencionadas. Starobinsky estimó que la cota mínima aproximada del tiempo necesario para alcanzar dicha singularidad sería de 22 Giga-años. Ya que las observaciones [1; 2] no consideraban en su análisis valores  $w < -1$ , dicha posibilidad debía ser cuando menos considerada para evitar que prejuicios previos pudieran conducir a una malinterpretación de futuras observaciones. Al fluido correspondiente a  $w < -1$  se le llamó energía fantasma<sup>6</sup> [4],

---

<sup>6</sup>En física teórica ya existía el término campo fantasma o de espíritu (ghosts field) cuyo significado es en general diferente al que nos hemos referido aquí. Dichos campos son los fantasmas de Fadeev-Popov (campos escalares sin masa que satisfacen las relaciones de anticonmutación necesarios para mantener la consistencia de la formulación en términos de la integral de camino en teoría cuántica de campos) y los campos o grados de libertad dinámicos libres de una teoría que aparecen en el Lagrangiano con un signo distinto al habitual pudiendo originar inestabilidades en la cuantización

(es decir, *algo aparente a la vista u otros sentidos, que no tiene sin embargo existencia corporal y que, por esto, resulta una denominación adecuada para este tipo de energía la cual genera una física de carácter heterodoxo*), un fluido para el que la suma de la presión más la densidad de energía es definida negativa. De hecho, una vez abierta la puerta a esta posibilidad, un estudio indicó que las observaciones de las SNIa podían ser interpretadas de forma tal que parecieran favorecer este régimen [42] y hoy en día, aunque el rango de valores que puede tomar  $w$  se ha restringido bastante, los datos del fondo cósmico de microondas medidos por el WMAP así como la mayoría de las combinaciones de estos con otros independientes parecen seguir apoyando esta posibilidad [50].

La propiedad fundamental que caracteriza a la energía fantasma es que su densidad de energía crece a medida que el universo se expande, teniendo dicha expansión mayor ritmo que la que originaría una constante cosmológica, por lo que se le suele llamar super-acelerada. Por lo tanto, si la dinámica del universo estuviera gobernada por energía fantasma con una ecuación de estado aproximadamente constante, la esfera de Hubble no sólo no crecería más rápido que el universo que la contiene sino que decrecería, acelerando la desaparición de galaxias de nuestro universo observable. Aún así, el hecho más sorprendente, derivado del crecimiento de la densidad de energía fantasma, es que podría originar una repulsión tal que excediera la atracción que mantiene ligadas las unidades cosmológicas, rompiéndolas en lo que pasarían a ser unidades cosmológicas menores que se alejarían entre sí de forma super-acelerada. Este proceso se repetiría una y otra vez hasta que las unidades cosmológicas fueran moléculas, átomos,... y, finalmente, el universo alcanzaría en un intervalo de tiempo finito la singularidad ya pronosticada por Starobinsky. En esta singularidad no sólo la curvatura del espaciotiempo es infinitamente grande, sino también la densidad de energía fantasma y el parámetro que caracteriza el tamaño del universo (el factor cósmico de escala). Dado el comportamiento que desembocaría en este tipo de fin del mundo, a dicha singularidad se le conoce como “big rip”, o gran desgarró<sup>7</sup>, [6].

Acabamos de ver en la sección anterior que la energía oscura restringida a  $w > -1$ , se puede expresar en términos de un campo escalar llamado quintaesencia, dotando a este fluido de una posible naturaleza fundamental. Realmente, esta no es una restric-

---

de esta teoría. Como se verá, una cierta formulación fundamental de la energía fantasma cósmica podría pertenecer al segundo tipo de estos campos de espíritu. Por otra parte, la aparición de estos posibles espíritus también deberá ser tomada en cuenta al considerar modificaciones del Lagrangiano de la relatividad general.

<sup>7</sup>El término big smash (o gran estrépito) [58], fue acuñado en un principio por analogía al big crunch (o gran implosión/crujido) aunque, probablemente, por el carácter más descriptivo del gran desgarró, la primera denominación cayó en desuso.

ción previa puesto que cualquier campo cuya densidad lagrangiana fuera un término cinético canónico menos un potencial, como es el caso de la quintaesencia, tendría necesariamente un parámetro de la ecuación de estado  $w > -1$  al ser interpretado como un fluido, ya que la condición  $w > -1$  es equivalente a  $\dot{\phi}^2 > 0$ . Para representar la energía fantasma como un campo escalar que no interactuase con otros campos de forma similar a como se hace con la quintaesencia, sería necesario considerar un término cinético negativo, lo que cambiaría la expresión de la densidad de energía y presión del fluido en términos de las derivadas del campo y su potencial. De esta forma, el campo no evolucionaría hacia valores que redujeran el valor del potencial minimizando la energía, sino que tendería a valores que incrementaran el valor del potencial y de la energía. Como en el caso anterior, el parámetro de la ecuación de estado podría tender al valor límite  $-1$  en un tiempo finito en el caso de que el potencial tuviera un valor máximo local, proporcionando una vida eterna al universo y transmutándose finalmente la energía fantasma en constante cosmológica [59]; si este no fuera el caso, el campo continuaría subiendo por el potencial hasta alcanzar un valor infinito en el momento en el que llegase el final cósmico.

Un campo con un término cinético negativo, conocido como campo fantasma o de espíritu, es considerado problemático debido a las inestabilidades que podría llevar asociado. Desde un punto de vista clásico aunque a pequeñas escalas las perturbaciones de un campo de este tipo serían despreciables, a escalas mayores, estas perturbaciones podrían tener una masa efectiva imaginaria originando inestabilidades cada vez mayores. Sin embargo, estas inestabilidades taquiónicas no aparecerían en modelos con ciertos tipos de potencial, en particular para los que describen un fluido con un parámetro de ecuación de estado constante en los que dicho parámetro toma valores en un cierto intervalo que depende de cantidad de energía fantasma presente en el universo [4]. Desde un punto de vista cuántico, los campos de espíritu no serían viables, ya que su presencia implicaría o bien la imposibilidad de una interpretación probabilística o bien la existencia de partículas con energía negativa propagándose hacia el futuro. En el mejor de los casos en el que las probabilidades estuvieran bien definidas, se debería requerir que estas partículas interaccionaran con la materia únicamente de forma gravitatoria para minimizar sus efectos y, aún así, las inestabilidades cuánticas del vacío de la teoría afectarían a estos modelos de forma catastrófica [59; 60]. Una posible solución a este problema sería considerar que la descripción en términos de este campo es simplemente una teoría efectiva, válida solamente a energías menores que una cierta energía de corte, [59; 60]. Otra posible solución a este problema, que no interpretase necesariamente el campo de manera fenomenológica, se podría encontrar en modelos fantasmas que no alcancen el valor límite  $w = -1$  si el intervalo de tiempo al que se mostrasen las inestabilidades fuera mayor que el que el universo necesita para alcanzar

el final cósmico.

Al igual que ocurre con la energía oscura con  $w > -1$ , la descripción en términos de un campo escalar con un término cinético canónico (en este caso cambiado de signo) es la más simple. Sin embargo, esta descripción no es la única posible, existiendo otros modelos que pueden reproducir un comportamiento fantasma y que, como en el caso de la  $k$ -esencia fantasma, también podrían mostrar un final del universo [61]. Por lo tanto, parece más prudente estudiar los modelos fantasmas en general mediante el uso de un fluido perfecto en las ecuaciones de Einstein, utilizando una ecuación de estado de este tipo y, en el caso de que estos modelos proporcionaran resultados acordes con las observaciones, discriminar si ésta es la sustancia que rige la dinámica de nuestro Universo, sin establecer a priori una posible descripción en términos de un campo. De hecho, la existencia de un fluido de propiedades tan extrañas desde un punto de vista clásico<sup>8</sup>, cuya densidad de energía crece con el volumen y que puede conducir al universo a una singularidad futura similar en características a la singularidad original diferenciándose solamente de ésta en la escala a la que tiene lugar, podría ser un signo de la necesidad de una descripción cuántico-relativista para la vejez del universo al igual que se considera en su juventud<sup>9</sup>, recuperando así una cierta simetría en la evolución del universo.

Si este fuera el caso resultaría tal vez muy ingenuo suponer que la descripción fundamental de la energía fantasma en la nueva teoría debería ser equivalente a considerar un campo escalar efectivo en la relatividad general, ya que podría no ser así, de forma que los problemas derivados de la consideración de este campo carecerían de sentido. Afortunadamente, el hecho de que la energía fantasma se comporte como un fluido perfecto en el marco relativista no sólo nos permite estudiar la dinámica de los modelos cosmológicos de este tipo, sino también el tipo de efectos que podría originar este fluido a otras escalas.

Por otro lado, una de las propiedades más asombrosas de este fluido fue encontrada González-Díaz y Sigüenza al estudiar la termodinámica de un modelo fantasma homogéneo e isótropo [29]. Estos autores dedujeron que la energía fantasma vendría caracterizada por una temperatura negativa, fenómeno comúnmente asociado a un sistema con niveles de energía discretos y finitos, lo que revelaría la ya mencionada posible naturaleza cuántica de la energía fantasma.

---

<sup>8</sup>Violaciones de las condiciones de energía han sido observadas ya en el laboratorio. Dichas violaciones están relacionadas con efectos cuánticos tales como el efecto Casimir o los estados aplastados.

<sup>9</sup>Cabe destacar la creencia comúnmente aceptada de que los efectos cuánticos podrían suavizar la singularidad del gran desgarro [62], aunque sin una teoría cuántica de la gravedad no sé puede saber con certeza hasta que punto nuevos efectos podrían afectar al comportamiento esperado.



### 1.3. Gas de Chaplygin.

Para describir procesos aerodinámicos Chaplygin introdujo en 1904 una ecuación de estado que lleva su nombre en la que la presión es inversamente proporcional a la densidad de energía, siendo la constante de proporcionalidad negativa, es decir,  $p = -A/\rho$  con  $A > 0$ . A primera vista podría parecer sorprendente que esta inusual ecuación proveniente de un ámbito no-relativista tuviera aplicación en el marco cosmológico, pero en 2002 Kamenshchik, Moschella y Pasquier [63], motivados por la conexión de la ecuación de Chaplygin con la teoría de cuerdas y la posible generalización supersimétrica de un fluido que la cumpla, estudiaron la dinámica de un universo homogéneo e isótropo lleno de un fluido de estas características conocido como gas de Chaplygin. El resultado de este estudio fue asombrosamente satisfactorio ya que el gas de Chaplygin tenía un comportamiento similar al de la materia no relativista cuando el tamaño del universo era pequeño, tendiendo al de una constante cosmológica cuando éste crecía. Por lo tanto, el uso de un sólo fluido permitía describir el comportamiento unificado del universo en distintas fases de su evolución.

Poco después Bento, Bertolami y Sen [64] generalizaron la noción del gas de Chaplygin permitiendo que la densidad de energía en la ecuación de estado contuviera una potencia caracterizada por un parámetro positivo<sup>10</sup>  $\alpha$ ,  $p = -A/\rho^\alpha$ . Los modelos de gas de Chaplygin generalizado (GCG), al igual que su antecesor sin generalizar, son capaces de interpolar entre un comportamiento similar al de la materia no relativista y una constante cosmológica, aunque en el modelo generalizado la fase intermedia mostraría una evolución diferente. Por lo tanto, estos modelos, que fueron entendidos como una variación mínima con respecto a la constante cosmológica, parecían permitir la construcción de un modelo unificado de la materia y la energía oscuras. Sin embargo, en dichos modelos no sería posible tener acúmulos de materia oscura [66], por lo que deberían ser desechados, siempre que no se considerase que este gas sólo es capaz de describir a la energía oscura, mientras que la materia oscura debería añadirse de forma independiente. Aunque la consideración de que el GCG pudiera tener una descompo-

---

<sup>10</sup>En un principio se consideró que  $\alpha$  debía ser menor o igual que la unidad [64] ya que valores mayores parecerían implicar una fase de evolución intermedia en el universo con velocidad del sonido a través del fluido hiperlumínica. Sin embargo, al comprobar que valores mayores podrían estar favorecidos por las observaciones, se propuso [65] que la consideración del gas de Chaplygin generalizado como proveniente de un Lagrangiano de tipo quintaesencia implicaría una velocidad del sonido igual a la de la luz; también se indicó [65] que, incluso en el caso en el que este gas proviniera de un Lagrangiano de tipo Born-Infeld generalizado, la cota máxima que impondría en el valor de  $\alpha$  la ausencia de velocidades hiperlumínicas no tendría porque ser necesariamente la unidad. Una vez más el desconocimiento de la posible teoría subyacente nos podría llevar a descartar un cierto tipo de ecuación de estado de forma prematura.

sición única en términos de materia y energía oscuras podría eludir este problema [67], la idea de que dicho gas únicamente describiera la energía oscura saltó a la luz como una posibilidad interesante.

Siguiendo este espíritu cabía preguntarse si un gas de este tipo podría ser capaz de presentar una naturaleza fantasma y, en caso afirmativo, si se podía seguir considerando como la variación más leve con respecto a la constante cosmológica a pesar de que un comportamiento fantasma frecuentemente llevaba asociado un evento catastrófico en el futuro del universo. Bouhmadi-López y Jiménez Madrid demostraron que este era el caso [7], encontrando un modelo de GCG fantasma cuyo comportamiento se aproximaría al de una constante cosmológica cuando el tamaño del universo fuera infinitamente grande, no presentando por lo tanto ninguna singularidad futura<sup>11</sup>.

## 1.4. Agujeros negros y energía oscura.

Los agujeros negros han sido uno de los objetos más afanosamente estudiados dentro del marco de la relatividad general. En esta sección no se pretende de ningún modo sintetizar de forma exhaustiva todos los avances llevados a cabo en la comprensión de estos objetos<sup>12</sup>, sino señalar brevemente las características que pueden considerarse de mayor interés para los desarrollos que más tarde serán presentados en esta memoria, en la que nos restringiremos a agujeros negros esféricamente simétricos y eléctricamente neutros.

Ya a finales del siglo XVIII Michell, en el marco newtoniano, señaló que las “partículas de luz” debían ser atraídas gravitacionalmente al igual que el resto de los cuerpos, por lo que si se consideraba una esfera de la misma densidad que el Sol pero con un radio 500 veces mayor, cualquier objeto que cayera sobre ella adquiriría en su superficie una velocidad mayor que la de la luz y la luz emitida de la esfera debería volver hacia ella atraída por su gravedad [71]. La posible existencia de una aglomeración atractiva de materia tal que no dejara escapar ni la luz tan siquiera fue apoyada por Laplace poco después (se puede encontrar una traducción en el apéndice A de la Ref. [3]). Sin embargo, estos antecesores de los agujeros negros fueron en cierto modo olvidados probablemente al ganar terreno la interpretación ondulatoria de la luz.

---

<sup>11</sup>Se debe mencionar que la posibilidad de que un gas de Chaplygin (con  $\alpha = 1$ ) muestre un comportamiento fantasma ya había sido considerada por Khalatnikov en Ref. [68]. Aun más, en Ref. [69], González-Díaz ya había encontrado anteriormente una solución GCG fantasma con un comportamiento asintótico similar al de la Ref. [7], aunque en este caso era necesaria una generalización aun mayor de la ecuación de estado.

<sup>12</sup>El lector interesado puede consultar [3; 70].

Poco después del nacimiento de la teoría de la relatividad general, en 1916, Schwarzschild buscó una solución de las ecuaciones de Einstein que permitiera estudiar de forma exacta una de las observaciones cruciales que habían impulsado el cambio de paradigma, el avance del perihelio de Mercurio. Este efecto no podía ser explicado dentro del marco newtoniano, al menos si no se suponía la existencia de un nuevo planeta invisible. Schwarzschild encontró [72] una solución estática capaz de describir el espacio con simétrica esférica en el exterior de una masa puntual o de una esfera de flujo incompresible, de forma tal que a una distancia infinitamente grande de ésta dicho espacio no se vería perturbado por la presencia de dicha masa. Aunque la solución de Schwarzschild planteó ciertos problemas relacionados con una posible singularidad que se produciría en un valor dado del radio, conocido hoy en día como radio de Schwarzschild, dicha singularidad no parecía tener mayores implicaciones en el estudio del espacio alrededor de un objeto astronómico<sup>13</sup> ya que la coordenada radial alcanzaría dicho valor dentro del objeto en estudio, donde el espacio ya no se describiría mediante esta solución.

Sin embargo Oppenheimer y Snyder mostraron [73] que, en determinadas circunstancias, una estrella lo suficientemente masiva vista por un observador lejano podría contraerse de forma tal que el radio de la estrella se aproximase asintóticamente al radio Schwarzschild, produciendo un enrojecimiento progresivo de la luz que abandonara su superficie desde un rango de ángulos cada vez más estrecho; mientras que un observador local de este mismo proceso que se encontrara en reposo con respecto a la estrella vería como ésta alcanza su valor crítico en un tiempo finito, en el que el observador dejaría de ser capaz de enviar señales luminosas ya que el cono desde el cual estas pueden escapar se habría cerrado. Dicho proceso correspondería a lo que llegó a ser conocido como colapso gravitatorio<sup>14</sup>.

Hubo que esperar casi veinte años para que Finkelstein [74] demostrara que la esfera definida por el radio de Schwarzschild no era una singularidad verdadera sino que actuaba como una membrana unidireccional que dejaba pasar las influencias causales a través de ella sólo en un sentido, introduciendo el concepto de horizonte de sucesos. Fronsda [75] y Kruskal<sup>15</sup> [76], independientemente, encontraron la extensión máxima del espacio de Schwarzschild, consistente en dos espacios exteriores no conectables

---

<sup>13</sup>Mientras que el estudio de esta solución comprendida como el espacio existente en el exterior de un cuerpo esférico es el germen de los agujeros negros relativistas, el análisis de dicho espacio en el caso de una masa puntual originó la consideración de unos objetos aún más extraños que serán tratados en la próxima sección: los agujeros de gusano.

<sup>14</sup>Aunque este resultado recuperaría en cierta medida el presentado en el ámbito newtoniano por Michell, tanto la naturaleza de la solución como el marco en el que se deriva son muy diferentes.

<sup>15</sup>Tanto en el trabajo de Finkelstein, [74], como en el de Fronsda, [75], se incluye una nota en la que se indica que Kruskal ya había obtenido la extensión completa del espacio de Schwarzschild hacía unos años, aunque ésta no se publicó hasta 1960.

mediante geodésicas temporales y dos espacios interiores<sup>16</sup>, evidenciando nuevamente que la divergencia de la métrica en la esfera de Schwarzschild, donde los invariantes de curvatura están bien definidos, era debida únicamente a una mala elección de las coordenadas; y reforzando el hecho de que en este espacio sí existe una singularidad en la que estos invariantes tenderían a un valor infinito, aunque ésta se encuentra en el origen de coordenadas.

En el esquema de colapso gravitatorio anteriormente descrito, la evolución de un objeto astronómico hacia un estado en el que parecía inevitable la presencia de una singularidad en el origen, podría ser entendida pensando que tal colapso no cesaría hasta que toda la energía se concentrara en este “punto singular”. Este incómodo resultado, junto con la observación de posibles fuentes de rayos X que parecían favorecer la tesis del colapso gravitatorio, motivó a Penrose a revisar este problema con la esperanza de que dicho colapso no implicase la formación de una singularidad en situaciones reales donde la simetría no fuera tan grande<sup>17</sup> o incluso no la hubiera en absoluto. No obstante, el resultado que obtuvo fue precisamente el contrario. Suponiendo el cumplimiento de la condición de energía nula obtuvo que desviaciones de la simetría esférica no evitarían la formación de singularidades como resultado del colapso gravitatorio [77]. Esta conclusión le llevó poco después a formular lo que hoy se conoce como la conjetura del censor cósmico débil [78], la cual implica que el colapso gravitatorio siempre daría lugar a un agujero negro quedando por lo tanto la singularidad encerrada dentro de un horizonte. Más tarde, dada la pérdida de predictibilidad que originaría la presencia de singularidades, formuló la conjetura del censor cósmico fuerte que propone que aparte de una posible singularidad inicial ninguna singularidad (fuera cual fuese su origen) sería visible por ningún observador [79].

Los avances teóricos en el estudio de estos misteriosos objetos astronómicos fueron otorgando mayor credibilidad a la existencia de los mismos, en tanto se establecían clasificaciones de los distintos agujeros negros que podrían existir en nuestro Universo. Según su geometría, estos podrían ser como los ya mencionados agujeros negros en reposo y eléctricamente neutros que corresponden a la solución de Schwarzschild, los agujeros negros en rotación, descritos por la métrica de Kerr [80], agujeros en reposo con carga eléctrica, cuya geometría viene descrita por la métrica de Reissner-Nordström [81; 82], y, los más generales, agujeros negros cargados y en rotación, que corresponden

---

<sup>16</sup>En la próxima sección se discutirá esta extensión máxima en algo más de detalle.

<sup>17</sup>Aunque la solución de Kerr que describe el espacio alrededor de un objeto rotante posee una simetría menor que la solución de Schwarzschild, también presenta una singularidad que, en este caso, es en forma de anillo. Penrose consideró, [77], que la simetría axial de esta solución podría seguir siendo un caso muy idealizado en la descripción del colapso gravitatorio de una distribución de materia real, por lo que decidió estudiar el problema sin presuponer ninguna simetría.

a la solución de Kerr-Newman<sup>18</sup> [83; 84]. Por otro lado, los agujeros negros podrían formarse por medio de un colapso gravitatorio, como el anteriormente mencionado, ser agujeros negros super-masivos, sobre cuya formación todavía no se ha establecido una teoría definitiva, o mini-agujeros negros, también llamados primordiales, creados en épocas tempranas del universo. La posible existencia de los agujeros negros fue apoyada por las observaciones de candidatos a objetos de este tipo [85], como el componente oscuro del par en sistemas de estrellas binarias que emiten rayos X debido a la acreción de materia proveniente de la estrella por el componente no visible (un ejemplo conocido es el sistema Cygnus X-1), o en el centro de las galaxias activas, en las que se observa un aumento de la luminosidad y de la velocidad de dispersión de las estrellas cerca del centro de la galaxia (como ocurre en la galaxia M87).

#### 1.4.1. Evolución de los agujeros negros.

Los agujeros negros evolucionan debido a la posible acreción de alguna sustancia o a la fusión de varios de ellos, de forma tal que su área no decrece en ningún caso. Esta última afirmación constituye el teorema del área de Hawking [86] y su demostración supone el cumplimiento de la condición de energía nula. Dicho teorema junto con la consideración de la gravedad de superficie, que puede ser entendida como la fuerza que debe ser ejercida desde el infinito para mantener una masa unidad de prueba en el horizonte, son la base de la formulación de las cuatro leyes de la mecánica de los agujeros negros [87] que han dotado a estos objetos de una mayor consistencia y, por su similitud con las leyes de la termodinámica, han sugerido una conexión entre los efectos gravitatorios y termodinámicos.

Hawking también demostró en 1974 que los agujeros negros no son tan negros ya que, debido a la consideración de efectos cuánticos, estos objetos deben emitir radiación térmica con una temperatura inversamente proporcional a la masa del agujero reduciendo su área en el proceso [88]. A primera vista, este proceso violaría el teorema del área aunque sin cuestionarlo, ya que este caso está fuera del contexto en el que se deriva dicho teorema en el que se presupone el cumplimiento de la condición de energía nula<sup>19</sup>.

---

<sup>18</sup>Una vez formado cualquier agujero negro estaría caracterizado por un máximo de tres parámetros: la masa, la carga y el momento angular. A esta propiedad se la conoce como el “teorema de los no pelos”.

<sup>19</sup>La violación de la condición de energía nula en el proceso de radiación de agujeros negros puede ser entendida ingenuamente pensando que la radiación de una partícula ordinaria debería ser equivalente a la absorción de otra partícula de similares características que violase la condición de energía nula. Una discusión más rigurosa consistiría en verificar que el tensor energía-momento cuántico renormalizado cerca de un agujero negro viola dicha condición

En el esquema cosmológico actual cabe preguntarse cual será la influencia de la energía oscura en la evolución de los agujeros negros. Aunque el crecimiento de estos objetos debido a la acreción de un campo de quintaesencia con ciertos tipos de potencial ya había sido considerado [89; 90; 91], el trabajo de Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [14] generalizó estos resultados al suponer que la energía oscura estaba descrita por un fluido perfecto. Además de recuperar los resultados anteriormente presentados en [89; 90; 91], Babichev y col. llegaron [14] a una conclusión sorprendente: los agujeros negros decrecerían debido a la acreción de energía fantasma hasta el punto de que todos ellos tenderían a desaparecer en el gran desgarro. Esta conclusión aparentemente estaría en desacuerdo tanto con el teorema del área como con la conjetura del censor cósmico. Con respecto al primero, al igual que hemos indicado en el caso de la radiación de los agujeros negros, se debe reiterar que este teorema se deduce en condiciones tales que la condición de energía nula sea respetada, lo que evidentemente no es el caso en presencia de un fluido fantasma. En lo relativo a la conjetura del censor cósmico se debe señalar que si la desaparición de los agujeros negros pudiera dar lugar a singularidades desnudas<sup>20</sup>, en todo caso esto ocurriría en el momento del fin del universo por lo que no podría ser visto por ningún observador, respetando la formulación fuerte de esta conjetura. En cualquier caso, y dado el carácter de este resultado, parecería necesaria una revisión del trabajo de Babichev y col. eliminando tantas aproximaciones como fuera posible.

## 1.5. Energía fantasma y agujeros de gusano.

Mientras que la solución de Schwarzschild podía ser utilizada desde un principio para el estudio de objetos astronómicos esféricos sin mayor problema y aún así, como hemos visto, el desarrollo de este estudio originó una de las ramas más relevantes de la física relativista, la consideración de dicha solución en la descripción de una masa puntual presentó problemas desde su inicio debido a la existencia de una singularidad y de un horizonte.

En 1935 Einstein y Rosen [92], explorando la posible formulación de una teoría atomista de la materia y de la electricidad que no implicara la aparición de singularidades en el marco relativista, llevaron a cabo lo que se considera el primer estudio riguroso de un agujero de gusano, conocido hoy en día como puente de Einstein-Rosen. En este

---

<sup>20</sup>Como ya ha sido señalado la existencia de esta singularidad es deducida en el caso en el que el espaciotiempo sea tal que se cumpla la condición de energía nula. Ya que la posible física de las singularidades (si existiera) es necesariamente desconocida, no podemos saber cual sería su evolución cuando dicha condición se dejara de cumplir.

estudio<sup>21</sup> los autores realizaron un cambio de coordenadas conectando las dos regiones asintóticamente planas de un agujero negro en el espacio extendido de Schwarzschild (entonces desconocido) con el objetivo de hacer desaparecer las singularidades de este espacio que en esos momentos eran entendidas como el propio horizonte y la singularidad central. Considerando que la representación matemática del espacio físico debía ser un espacio de dos hojas idénticas<sup>22</sup>, llegaron a la conclusión de que una partícula es una *porción de espacio conectando estas dos hojas idénticas (puente)*.

Una motivación similar fue la que llevó a Wheeler [94], casi veinte años después, a estudiar las posibles entidades gravitatorio-electromagnéticas, los geones, y a notar que las líneas de fuerza del campo electromagnético podrían conservarse en un espacio doblemente conexo, pareciendo que cada una de las bocas del túnel que describe la conexión extra tienen cargas de igual magnitud y signo opuesto al ser vistas desde el espacio exterior. En este trabajo, [94], Wheeler incluyó lo que hoy se considera la primera representación de un agujero de gusano, Fig. (1.2). Misner y el mismo Wheeler [95] dieron un paso más allá al suponer que la física clásica podía ser totalmente descrita por medio del espacio curvo vacío si este espacio presentaba múltiples conexiones por medio de asas a las que llamaron agujeros de gusano. Así, como ellos señalaron, este nuevo término describiría estructuras más generales que la solución particular presentada por Einstein y Rosen.

El ya mencionado trabajo de Kruskal, [76], sobre la extensión máxima del espacio de Schwarzschild tiene también un gran interés en lo referido a la comprensión de espacios de tipo agujero de gusano, o sus antecedentes. En este trabajo se ponía en evidencia que dicha extensión máxima no sólo describía las regiones esperadas del espacio exterior e interior de un agujero negro, sino que tenía en cuenta una nueva región interior, que también contendría una singularidad en el origen, y otra exterior asintóticamente plana<sup>23</sup>. De este modo esta extensión máxima se podría entender como un caso particular de las topologías consideradas por Misner y Wheeler, [95], ya que un agujero de gusano conectando dos regiones del mismo espacio, como había sido definido por estos autores, podría ser considerado equivalente a uno que conectase dos espacios diferentes si estas dos regiones se encontraran a una distancia enorme comparada con las dimensiones de

---

<sup>21</sup>Se debe destacar que en este trabajo, en el que también se incluía una descripción similar para la partícula cargada, se consideraba cierta modificación de la teoría de la relatividad general.

<sup>22</sup>Flamm [93], en 1917, ya había observado no sólo la posible existencia de estas dos hojas en la solución de Schwarzschild sino también su posible conexión, aunque no de una forma tan explícita como en los trabajos posteriores.

<sup>23</sup>La membrana que separase estas dos nuevas regiones del espacio sería unidireccional en sentido contrario a la que se encontraba entre las dos regiones ya conocidas, prohibiendo la entrada a la región interior [85]. Por esta razón, al igual que a la región interior original se la conoce como agujero negro, a esta otra región se la podría considerar un agujero blanco.

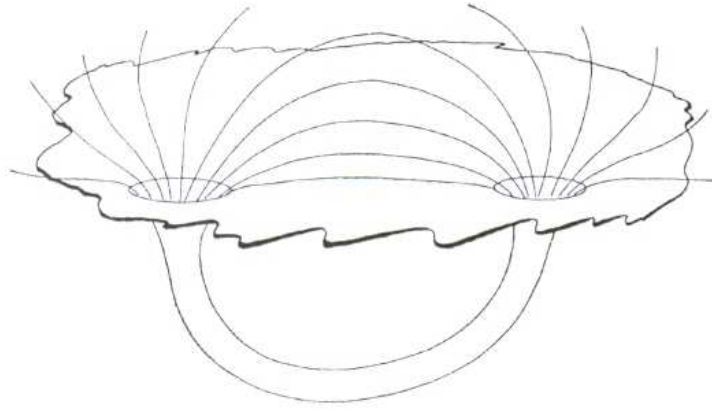


Figura 1.2: Primera representación de un agujero de gusano hecha por Wheeler en la Ref. [94]. En relación a ésta, Wheeler comentó que se refiere a la representación de *las líneas de fuerza en un espacio doblemente conexo* y que *las líneas de fuerza se comportan como si las bocas del túnel fueran lugares con cargas de igual magnitud y signo opuesto*.

la garganta. Aún más, la extensión máxima de Kruskal contendría una descripción del puente de Einstein-Rosen en la superficie espacial definida por un tiempo de Schwarzschild nulo. Sin embargo, dada la estructura global de este espaciotiempo y la posibilidad de recuperar dicho puente sólo en determinadas condiciones, parecería imposible que se pudiera violar la causalidad utilizando este agujero de gusano, ya que la garganta se estrangularía antes de que un hipotético rayo de luz que hubiera sido enviado desde una boca pudiera salir por la otra. Fuller y Wheeler [96] probaron que este era el caso al mostrar la inestabilidad de un agujero de gusano de este tipo (y por tanto de un puente de Einstein-Rosen) y la imposibilidad de establecer una comunicación entre las dos regiones exteriores del espacio de Schwarzschild extendido.

Dado que el teorema de Birkhoff nos dice que la única solución esféricamente simétrica en el vacío, por lo tanto estacionaria, es la solución de Schwarzschild, Ellis reflexionó sobre la necesidad de introducir un cierto “éter” para poder describir una partícula mediante un espaciotiempo con esta simetría, que fuera estático y no implicase la presencia de singularidades, [97]. De esta forma encontró una familia de soluciones que bautizó como agujeros-sumideros<sup>24</sup> capaces, al menos en principio, de cumplir sus propósitos. El problema de este tipo de soluciones radica en que la constante gravi-

<sup>24</sup>Estos objetos describirían también una conexión del espacio en forma de asa aunque, dados los efectos gravitatorios del flujo de éter, las partículas se verían en general atraídas por una de las bocas y repelidas por la otra. El caso particular en el que el éter estuviera en reposo correspondería a un agujero de gusano.



tatoria de acoplo que multiplicaría al término cinético del campo escalar libre que describe este éter, debería tener el signo cambiado con respecto a la situación estándar, lo que parece implicar que dicho éter tendría energía negativa. Posteriormente tanto Bronnikov [98] como Kodama [99], estudiaron diferentes soluciones que les permitieron recuperar la necesidad de cambiar el signo del término cinético del campo escalar origen de la geometría para obtener un agujero de gusano como los que habían sido descritos por Wheeler.

No obstante, los estudios mencionados en el párrafo anterior, [97; 98; 99], pasaron en cierto modo desapercibidos<sup>25</sup> y los agujeros de gusano fueron olvidados en el marco relativista hasta el trabajo de Morris y Thorne en 1988 [101]. En este trabajo, que se presenta como una herramienta fundamentalmente pedagógica para la enseñanza de la relatividad general, se consideran las características que tendría que cumplir un espaciotiempo para describir un agujero de gusano que pudiera ser utilizado por un viajero como un atajo entre dos regiones de un universo o le permitiera explorar otro universo, entre las que se debe destacar la ausencia de horizonte y singularidades. De esta forma, suponiendo la existencia de una familia de soluciones que mostrara estas características y que fuera estática y esféricamente simétrica<sup>26</sup>, se pone de manifiesto a través de las ecuaciones de Einstein que el contenido material que debería generar estos agujeros de gusano no sólo poseería una componente radial de la presión negativa, tensión, sino que ésta sería tal que violaría la condición de energía nula; aún más, en este mismo trabajo se incluye un comentario de Page indicando que la característica mencionada no sería exclusiva del caso particular estático y esféricamente simétrico. Aunque Morris y Thorne señalaron este tipo de violaciones tanto en otros ejemplos teóricos como en el laboratorio, dichos autores estudiaron también la posibilidad de minimizar el uso de esta extraña sustancia que llamaron materia exótica.

Una de las características principales de estos agujeros de gusano es que, como ya sugirieran Morris y Thorne [101], en determinadas circunstancias, podrían ser utilizados para viajar temporalmente [8]. De hecho, una vez formado uno o varios agujeros de gusano parecería relativamente fácil “construir” una máquina del tiempo. Aunque para ello se apelaba normalmente a la ayuda de una “civilización avanzada”, la posibilidad

---

<sup>25</sup>Aunque en este texto se están considerando solamente soluciones con simetría esférica, el espacio extendido de las soluciones de Reissner-Nordström y Kerr, en el caso en el que describen agujeros negros convenientemente censurados por horizontes en rotación cargados y en rotación respectivamente, han sido también interpretadas como agujeros de gusano [3; 100]. Sin embargo, estos agujeros de gusano sólo se podrían cruzar en una dirección (véase en particular la discusión sobre la solución de Reissner-Nordström en la pág. 158 de la Ref.[3]) y serían peligrosos para viajeros intrépidos que, aunque pudieran evitar la singularidad de anillo, probablemente morirían al pasar cerca de ella [100].

<sup>26</sup>Se debe destacar que una solución particular de esta familia sería la encontrada por Ellis en la Ref. [97] para el caso en el que el éter estuviera en reposo.

de tomar un atajo por medio de estos agujeros implicaría la posibilidad de viajes más veloces que los de la propia luz (si bien localmente esta velocidad no se sobrepasara a través del agujero de gusano) lo que parecería indicar la viabilidad de un viaje en el tiempo.

Las implicaciones paradójicas de un fenómeno de este tipo llevaron a Hawking a formular la llamada conjetura de protección cronológica de acuerdo con la cual las leyes de la física impiden la aparición de curvas temporales cerradas [102]. Según Hawking, al tener en cuenta los efectos cuánticos y semi-clásicos<sup>27</sup> el valor esperado del tensor energía-momento divergería en el horizonte de Cauchy que delimitaría la región del espaciotiempo que contuviera curvas temporales cerradas del resto, impidiendo la formación de estas regiones acausales. Es en este trabajo esencial en el que Hawking introduce su famosa alusión a una “*agencia de protección cronológica*” y pone como prueba experimental del cumplimiento de su conjetura el hecho de no haber sido *invadidos por hordas de turistas del futuro*. Contraejemplos a la conjetura de Hawking no tardaron en ser publicados [103; 104], de entre los que cabe destacar el trabajo de Li y Gott, [105], en el que encuentran un vacío autoconsistente para el espacio de Misner, precisamente el caso particular considerado por Hawking, en el que el valor esperado renormalizado del tensor energía-momento tiende a cero<sup>28</sup>.

Por otra parte, una de las señales del gran desarrollo alcanzado por la física de los agujeros de gusano a partir de la aparición del trabajo de Morris y Thorne fue la publicación del libro “Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking” de Visser en 1995 [100]. En este libro se incluyen, entre otros puntos cruciales de la física de estos objetos peculiares, tanto los intentos de minimizar el contenido exótico que debería ser utilizado con la intención de mantener intactas las condiciones de energía al menos localmente, como las distintas posturas que se han adoptado ante la aparente implicación de violaciones de la causalidad que implicaría la manipulación de dichos objetos, entre las que destaca la ya mencionada conjetura de protección cronológica. Como el mismo Visser señaló en la Ref. [106], la violación de esta conjetura incluso al tener en cuenta efectos semi-clásicos no implicaría necesariamente el incumplimiento de ésta, sino que podría evidenciar la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad en la que ésta se demostrase. En cualquier caso, se debe recalcar que el cumplimiento de esta conjetura

---

<sup>27</sup>La estabilidad clásica de un agujero de gusano susceptible de ser utilizado como una máquina del tiempo ya había sido considerada por Morris, Thorne y Yurtsever, [8], llegando a la conclusión de que, aunque un rayo de luz que pasase a través de esta estructura sufriría un corrimiento Doppler en cada viaje, la boca del agujero de gusano tendría un efecto de lente divergente, debido a la violación de las condiciones de energía, que haría disminuir la amplitud del rayo de luz.

<sup>28</sup>En realidad Li y Gott demostraron que esta cantidad sería cero exceptuando en un conjunto de medida nula donde no estaría bien definido aunque, por continuidad, esto implicaría que podría ser considerado cero en todas partes, [105].

por medio de algún proceso desconocido parecería impedir el uso de los agujeros de gusano como máquinas del tiempo y no tanto la propia existencia de dichos agujeros.

A pesar de los estudios llevados a cabo en este campo, el hecho de que clásicamente no se pudiera disponer de sustancias susceptibles de ser utilizadas como material exótico y que cuánticamente sólo parecieran producirse en pequeñas cantidades y durante un cierto intervalo de tiempo sujeto a las desigualdades cuánticas, seguían dejando toda labor de estabilización de estos atajos a “civilizaciones avanzadas” y, por lo tanto, el estudio teórico de agujeros de gusano macroscópicos estaba más bien orientado a una mejor comprensión de la relatividad general que no al examen de una posible realidad física de tales construcciones espaciotemporales. En este marco cabe destacar un trabajo de Roman [107] en el que, teniendo en cuenta que los agujeros de gusano parecían estar permitidos siempre que estos se presentaran en escalas microscópicas, consideró que la época inflacionaria podría haber provisto un mecanismo natural que hubiera hecho crecer estas estructuras, expandiéndose de la misma forma que lo hiciera el universo; aunque a falta de una explicación de como estas estructuras podrían haber sobrevivido hasta nuestros días, este estudio no parecía tener mayores implicaciones para la posible utilización de los agujeros de gusano.

Sin embargo, las observaciones sobre la expansión acelerada del Universo cambiaron esta situación drásticamente ya que una de las posibles sustancias responsables de este fenómeno, la energía fantasma, no sólo viola la condición de energía nula sino que sería la componente principal del contenido del universo, haciendo posible la existencia de una fuente inagotable de materia exótica. Este hecho fue notado por González-Díaz [108] quien, reflexionando sobre la posibilidad de que un universo fantasma pudiera ofrecer un ambiente natural para la existencia de los agujeros de gusano, realizó un estudio similar al de Roman [107], con las diferencias cruciales que suponen que éste se refiriera al ámbito actual del universo y que el crecimiento de estos objetos con el universo pudiera ser incluso más rápido que el anteriormente considerado en el caso de un modelo super-inflacionario fantasma. En este trabajo [108], González-Díaz también especuló sobre la posibilidad de que una civilización avanzada futura utilizase estos enormes agujeros de gusano para evitar la singularidad del gran desgarramiento presente en estos modelos fantasmas, dado que en dichos modelos habría una fase de contracción “posterior” a la singularidad. Así, esta civilización podría viajar desde la boca que se encuentra en el universo en expansión a la que se encuentra en contracción, lo que originaría una máquina del tiempo, emigrando a un futuro del universo más seguro.

A la vista del estudio de Babichev, Dokuchaev y Eroshenko sobre la acreción de energía oscura por agujeros negros, González-Díaz consideró también que un fenómeno similar podría tener lugar en los agujeros de gusano [13]. Argumentando que ya que

la masa necesaria para producir un agujero de gusano era aproximadamente igual y de signo contrario a la que originaría un agujero negro, supuso que el cambio de la masa de un agujero de gusano debido a la acreción de energía oscura debería ser aproximadamente igual y de signo contrario a la obtenida por Babichev y colaboradores. De esta forma obtuvo que un agujero de gusano decrecería debido a la acreción de energía oscura con  $w > -1$  y crecería si la sustancia acretada fuera energía fantasma, siendo el crecimiento tal que este objeto llegaría a ser infinitamente grande antes del final del universo presente en este tipo de modelos. Este hecho implicaría que el tamaño del agujero de gusano sería mayor que el del propio universo antes de esta divergencia, con lo que el mismo universo podría incluso emprender un viaje a través de este puente evitando el gran desgarramiento, fenómeno que es conocido actualmente como “big trip” o gran viaje. Obviamente un resultado de este tipo en el que la posible evolución de un objeto astronómico produciría consecuencias drásticas en un ámbito cosmológico, debe ser estudiado cuidadosamente en más profundidad.

Por otra parte, la hipótesis de González-Díaz sobre la posible consideración de la energía fantasma como materia exótica a la vista de las características comunes de estas dos sustancias, fue confirmada independientemente Sushkov, [9], y Lobo, [10], al encontrar ciertas soluciones pertenecientes a la familia de Morris y Thorne generadas por una versión inhomogénea de dicha energía. Se debe destacar que los estudios precedentes al trabajo de Morris y Thorne en el que se consideraban agujeros de gusano generados por un campo escalar que necesariamente debía estar descrito mediante un término cinético negativo [97; 98; 99], indicarían también un resultado similar ya que, como hemos mencionado anteriormente, una posible modelización de la energía fantasma sería precisamente la consideración de un campo escalar en el Lagrangiano con un término cinético de este tipo.

## 1.6. ¿Y si no es un fluido?

Como se ha señalado al inicio de esta introducción, la expansión acelerada del Universo actual ha generado una reflexión sobre los pilares fundamentales que sostenían la Cosmología Estándar, aunque por el momento sólo se ha mencionado la posible violación de una o varias condiciones de energía. Dado el éxito de la relatividad general y las aparentes evidencias que favorecen la aproximación de un universo homogéneo e isótropo a gran escala, ésta será la visión predominante en la presente memoria. No obstante se debe señalar que también han sido consideradas situaciones en las que se ha relajado uno de los otros dos pilares de la cosmología. Caben destacar los estudios que han examinado la posibilidad de que la teoría de Einstein no sea la que gobierne

los fenómenos gravitatorios. Mucho se ha reflexionado sobre la posible solidez de estas teorías y sus posibles ventajas pero, dado que su estudio y desarrollo queda en general fuera de los objetivos de la presente tesis, simplemente incluiré un breve resumen sobre algunas de las más destacadas (el lector interesado puede consultar [109], [31; 110] y [111; 112]).

### 1.6.1. Teorías de gravedad extendida.

Las teorías de gravedad extendida consideran la misma estructura espaciotemporal que la relatividad general suponiendo una interacción diferente de ésta con la materia<sup>29</sup>. Aunque este tipo de teorías no fueron formuladas a la vista de las observaciones sobre la expansión acelerada del Universo, entrando en juego como intentos de explicación del esquema inflacionario o incluso antes de la consideración del mismo, el interés en éstas ha sido reavivado por la posible interpretación de dichas observaciones como señales de la pérdida de validez de la relatividad general a escalas cosmológicas.

Probablemente el primer ejemplo notable de un intento de formulación riguroso de una teoría que pudiera sustituir a la relatividad general es bien conocido y fue llevado a cabo por Brans y Dicke en 1961 [114]. Estos autores pusieron en duda que la teoría de Einstein cumpliera el llamado principio de Mach que precisamente había inspirado a Einstein en su formulación. Este principio podría ser enunciado como: un referencial inercial local debe estar determinado por cierto promedio del movimiento de los objetos astronómicos distantes. De esta forma, estos autores introdujeron un campo escalar cósmico acoplado a la geometría, lo que les proporcionó la aparición de una “constante” gravitatoria variable que, según ellos, estaría en un mayor acuerdo con el principio mencionado.

Al tipo de teorías que como la de Brans-Dicke consideran dos variables gravitatorias de este tipo, un campo escalar y el tensor métrico estándar, se las conoce como teorías escalar-tensor. Se debe destacar que estas teorías contienen a la relatividad general en el límite en el que el campo está mínimamente acoplado a la geometría, es decir, cuando el escalar de curvatura no aparece multiplicado por ningún término que contenga al campo en el Lagrangiano; más concretamente, si el campo cósmico sigue estando presente podría ser considerado como un modelo de energía oscura.

Por otro lado las llamadas teorías de órdenes superiores consideran que las ecuaciones de Einstein deben ser modificadas de forma tal que aparezcan términos de derivadas en la métrica de orden mayor al segundo, mediante la contemplación en el Lagrangiano de términos de orden superior en invariantes de curvatura. El caso más simple de estas

---

<sup>29</sup>Una introducción simple a estas teorías, así como su motivación física puede encontrarse en [113].

teorías correspondería a las de la denominada gravedad- $f(R)$  en las que se consideran solamente dependencias en el escalar de curvatura. Una motivación para considerar seriamente las teorías escalar-tensor así como las teorías de órdenes superiores sería que el Lagrangiano efectivo de ciertos intentos de cuantización de la gravedad parece contener términos de este tipo. De esta forma, suponiendo que un análisis perturbativo de una posible cuantización de la gravedad debe producir términos de interacción geometría-materia, como los que aparecen en las teorías escalar-tensor, o geometría-geometría, como en las teorías de órdenes superiores, se podría considerar a éstas como teorías semiclásicas de la gravedad.

Se debe destacar el auge alcanzado por las teorías de gravedad extendida en los últimos años, en particular de las de gravedad- $f(R)$ , en lo relativo a modelizar la época actual de expansión acelerada del Universo. De hecho, al igual que podría parecer que un cierto comportamiento del factor cósmico de escala siempre podría ser descrito por un modelo de tipo quintaesencia para un potencial particular (en el que por supuesto también se considerase el lagrangiano de la materia), un proceso de re-construcción similar permitiría también obtener una función particular  $f(R)$ , es decir, elegir una teoría perteneciente a esta familia.

Por otro lado es bien sabido que las teorías de gravedad- $f(R)$ , al igual que las teorías escalar-tensor, están relacionadas con la teoría de Einstein en presencia de un campo escalar mediante una transformación conforme, lo que es conocido normalmente como transformación conforme del esquema de Jordan al esquema de Einstein. Esta equivalencia matemática podría ser utilizada para tratar el problema de forma que éste se reduzca a su expresión más simple, en cualquiera de los dos esquemas, siempre que los resultados sean interpretados en el que se considere el esquema físico<sup>30</sup> ya que, aunque en algunos estudios se haya supuesto que la equivalencia matemática equivale a una equivalencia física, si tal equivalencia no se cumpliera, una interpretación de los resultados en el esquema no físico podría llevarnos a conclusiones erróneas sobre la no-validez de una teoría (un resumen de las diferentes posturas puede encontrarse en [115]).

Finalmente se debe destacar que cualquier teoría que pretenda reemplazar a la teoría de la relatividad general no sólo tendrá que describir la época actual del Universo sino que deberá recuperar al menos los resultados obtenidos de ésta a la escala del Sistema Solar<sup>31</sup>, donde su validez parece estar fuera de duda, así como describir una

---

<sup>30</sup>Con la expresión “el esquema físico” me refiero a aquel esquema en el que se considera que la física se desarrolla. Siguiendo motivaciones diferentes puede ser considerado como el esquema de Einstein o el de Jordan.

<sup>31</sup>Parece ser que algunas teorías de gravedad extendida recuperan los mismos resultados que la relatividad general en el límite post-newtoniano salvo un término tipo Yukawa que, más que ser un

historia cosmológica compatible con las observaciones actuales. Si existe o no una teoría extendida de la gravedad que cumpla todas estas condiciones es todavía materia de debate.

### 1.6.2. Modelos de branas.

En los modelos de branas se considera que la estructura espaciotemporal debe tener más dimensiones espaciales que las tres consideradas en la relatividad general, mientras que la interacción de esta estructura con la materia estaría descrita por las mismas ecuaciones que en la teoría de Einstein generalizada al número de dimensiones de estos modelos (resúmenes sobre estas teorías pueden encontrarse en [111; 112]).

El esquema de gravitación cuántica de la teoría de cuerdas prevé que existan ciertos objetos extensos de dimensión mayor que las cuerdas los cuales no aparecen en un análisis perturbativo y adquieren un papel fundamental en la teoría: las llamadas branas. De una forma muy resumida e imprecisa se podría entender que nuestro universo sería una de estas branas en la que estarían confinadas las interacciones no gravitatorias, mientras que los objetos que describieran las interacciones gravitatorias se moverían libremente por todas las dimensiones.

Normalmente se considera que las dimensiones extra, que no podemos observar, están compactificadas, pero en ciertos casos la solución podría ser entendida como un modelo efectivo 5-dimensional (4 dimensiones espaciales más una temporal) en el que la dimensión extra podría ser relativamente larga. En este contexto destacan los modelos de Randall y Sundrum [20; 116]. En particular, en el modelo Randall-Sundrum tipo 1<sup>32</sup>, [20], se consideraría que existe una brana de 3+1 dimensiones con una cierta tensión positiva en el volumen 5-dimensional que describiría nuestro universo, siendo la dimensión extra infinita.

Los modelos de branas, que obtuvieron un gran éxito al proporcionar posibles explicaciones al esquema inflacionario, podrían depararnos gratas sorpresas en el marco cosmológico actual.

---

problema de la teoría, podría ser considerado como una virtud, ya que la teoría sería capaz de explicar fenómenos como la anomalía Pioneer. Cuando me refiero a recuperar los resultados a escalas del Sistema Solar, por supuesto, estoy permitiendo también éste tipo de comportamientos.

<sup>32</sup>En esta memoria denominamos como modelo de Randall-Sundrum tipo 1, al modelo de Randall-Sundrum con una sola brana. Debemos destacar que esta notación es distinta de la utilizada en la Ref. [112].

## 1.7. Síntesis de los contenidos de esta memoria.

En esta memoria se presenta el estudio de nuevos efectos relacionados con la expansión acelerada del Universo en el supuesto de que dicha aceleración sea debida a la presencia de algún tipo de energía oscura manteniendo, en la mayoría de los casos, el esquema de la relatividad general. Estos nuevos efectos podrán ser debidos al comportamiento del universo en sí, en ciertos modelos de energía oscura, o a la influencia que podrían llegar a tener a escalas cosmológicas ciertos objetos astronómicos, los agujeros negros y de gusano, que evolucionan de manera significativa debido a la acreción de dicha energía. Ya que la posible existencia de los agujeros de gusano parece estar íntimamente ligada a la existencia de energía fantasma como sustancia preponderante en nuestro universo y a la vista de la mejor comprensión obtenida de los fenómenos gravitatorios debida al estudio de la termodinámica de los agujeros negros, se considerará de interés el análisis de una posible formulación de la termodinámica de los agujeros de gusano.

Por otra parte, dado que el marco teórico en el que se desarrollará la mayor parte de esta tesis, la teoría de la relatividad general en presencia de un campo escalar, es matemáticamente equivalente al de una teoría de gravedad- $f(R)$ , consideraremos también la posibilidad de que esta equivalencia tenga un carácter físico. Sin embargo, no se debe olvidar que la explicación “más simple” de la aceleración del Universo es el caso en el que la energía oscura está desprovista de dinámica, es decir una constante cosmológica, por lo que un resumen sobre el papel que ésta ha tenido en la física teórica, mencionando sus posibles problemas teóricos, y los fenómenos que podrían llegar a tener lugar en un modelo de este tipo también serán incluidos.

Como ya se ha adelantado el estudio de Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [14] así como el de González-Díaz [13] contienen resultados totalmente novedosos sobre la posible evolución de los agujeros negros y de gusano, respectivamente, debida a la acreción de energía oscura. Dado el interés que tienen estos resultados, la recuperación o posible modificación de éstos al suprimir algunas de las aproximaciones hechas por estos autores es de gran interés. Este tema será abordado en el Capítulo 2 de esta memoria. Así, en la sección 2.1 repasaremos el método de Babichev y col. y su influencia en la posible desaparición de los agujeros negros al considerar la acreción de un fluido fantasma, indicando las posibles restricciones de dicho método. Estas restricciones nos llevarán a realizar una primera generalización del método de acreción en agujeros negros en la que se considerará un flujo acretado no nulo 2.1.1, así como un acercamiento a un escenario en el que se tengan en cuenta los efectos cosmológicos para estudiar su posible influencia 2.1.2. Por otro lado, el estudio de la acreción de energía oscura por agujeros de gusano será tratado en la sección 2.2, presentando los estudios previos



realizados por González-Díaz. Una generalización similar a la realizada en el caso de los agujeros negros, en la que se considerará una métrica capaz de describir un flujo, será tratada en 2.2.1 destacando que, en este caso, dicho procedimiento conllevará menos aproximaciones. Dada la polémica que se ha generado en la literatura reciente en torno a ambos procesos de acreción, en la sección 2.3 se incluirá un breve resumen sobre el debate desarrollado, mencionándose estudios alternativos que dotan de mayor consistencia a nuestros resultados, apuntándose posibles líneas de investigación futuras desde un punto de vista teórico y observacional. Finalmente, en la sección 2.4 se recapitularán las conclusiones extraídas a lo largo de este capítulo y se incluirán comentarios finales relevantes, como los relativos a la consideración del método de acreción en modelos 5-dimensionales.

En el Capítulo 3 se considerarán nuevos fenómenos, que podrían ser decisivos en el futuro del universo, usando modelos de energía oscura particulares. En la sección 3.1, se incluirá un fluido oscuro en un modelo de branas Randall-Sundrum tipo 1 que no sólo nos permitirá llegar a concebir una posible generalización de éste, el cual llamaremos su “dual”, sino que nos dará información sobre si los procesos de acreción estudiados anteriormente podrían llegar a tener efectos cosmológicos sorprendentes, incluso de mayor transcendencia de lo esperado, 3.1.2, abriendo un nuevo marco conceptual en el que podrían existir diferentes tipos de grandes viajes cósmicos 3.1.3.

En lo relativo a la aparente relación entre un fluido fantasma y un final del universo desgarrado, en la sección 3.2 mostraremos cómo fluidos del mismo tipo que el que evita esta clase de catástrofes, aun siendo fantasma, podrían originar otro final no menos hostil, el “big freeze”, o gran congelación, presentado en la subsección 3.2.1. La consideración del dual de estos fluidos en un modelo de branas no implicará necesariamente mejora alguna en este aspecto 3.2.2. En la subsección 3.2.3 incluiremos algunos comentarios que nos ayudarán a comprender mejor la naturaleza de este fluido y, en la subsección 3.2.4, veremos como en un escenario 4-dimensional, al igual que sucedía con el gran desgarró, la gran congelación podría ser evitada si el universo se sumiera en un gran viaje, aunque este no sería el caso si el modelo está lleno del dual fantasma de un gas de Chaplygin generalizado. Por otra parte, la idea de que ciertos problemas intrincados podrían encontrar soluciones sencillas en el marco de la energía oscura, sección 3.3, se plasma gracias al modelo de multiverso oscuro clásico presentado en 3.2.1 al ser referido a un tiempo cósmico infinito, 3.3.2, teniendo en cuenta, entre otros, los efectos debidos a la acreción de energía oscura 3.3.3. Finalmente, en la sección 3.4, se presentarán las conclusiones así como algunas reflexiones relativas a una visión conjunta de los resultados presentados en este capítulo.

El hecho de que en un marco cosmológico dominado por energía fantasma sea

natural considerar la posible existencia de los agujeros de gusano debe llevar a un estudio en mayor profundidad de estos objetos que será abordado en el Capítulo 4. Así, consideraremos la formulación geométrica de espaciotiempos esféricamente simétricos, 4.1, desarrollada por Hayward para los agujeros negros dinámicos desarrollada [27; 28; 117], aplicándola al caso estático de las soluciones de Morris y Thorne 4.2. Este formalismo podrá ser aplicado en general a agujeros de gusano dinámicos, cuando estos son caracterizados unívocamente 4.3. De esta forma obtendremos un escenario donde es posible la emisión térmica de los agujeros de gusano, implicando la existencia de una termodinámica que formularemos, al menos de manera tentativa, en la sección 4.4. Para completar la discusión se añadirán ciertos comentarios en la sección 4.5.

Existe otra corriente de pensamiento en la física actual que plantea la posible necesidad de modificar la teoría de Einstein en la dirección de las teorías de gravedad- $f(R)$ , al contrario de la que considera un fluido oscuro como la seguida en esta memoria. Dada la equivalencia matemática de ambos marcos teóricos, puesta de manifiesto mediante el uso de las transformaciones conformes, en el Capítulo 5 se estudiará si dichas transformaciones implicarían también una posible equivalencia física. Este estudio nos permitirá comprobar si un modelo particular dependerá del esquema en el que ha sido considerado. Para ello, en la sección 5.1, se tratará una teoría particular de esta familia que, gracias al método de las simetrías Nöther en cosmología, nos permitirá obtener una solución analítica para el caso cosmológico y que además tiene la ventaja de, al menos en principio, recuperar ciertos datos obtenidos en las observaciones. Dicha solución nos permitirá comprobar sin ninguna duda que dicha equivalencia física no se cumple al compararla con la solución correspondiente en el esquema de Einstein, 5.2. En la sección 5.3 presentaremos las conclusiones e incluiremos algunos comentarios relativos tanto al modelo cosmológico presentado como a la no equivalencia física de ambos esquemas.

En el Capítulo 6 se profundizará en la comprensión de los motivos que nos pueden llevar a desconfiar de la constante cosmológica como la única responsable de la expansión acelerada actual del Universo, al recapitular los distintos intentos de aplicación de la misma, mencionando también los posibles problemas teóricos que frecuentemente se le asocian. Sin embargo, para aquellos para los que tales argumentos no resulten suficientemente persuasivos e insistan en la consideración de esta constante, se debería tener en cuenta que en un universo en el que ésta fuera la única energía de vacío, el comportamiento asintótico sería similar al de un modelo de Sitter, lo que podría dar lugar a fenómenos aun más sorprendentes que los discutidos en esta memoria en modelos de energía oscura, como la posible nucleación de burbujas que contuvieran un vacío diferente. Todas estas consideraciones se incluirán en la sección 6.1.

---

En la sección 6.2 profundizaremos algo más en la comprensión del espaciotiempo resultante al nuclearse en un universo de Sitter una burbuja Coleman-De Luccia [34], con un espaciotiempo de Sitter distinto en su interior, obteniendo una foliación de éste mediante hipersuperficies de curvatura extrínseca media constante (CMC). Finalmente, en la sección 6.3 incluiremos ciertos comentarios sobre el uso de la constante cosmológica y las foliaciones CMC del espaciotiempo mencionado.

Finalmente, en el Capítulo 7 presentaremos las conclusiones de esta memoria.



## Capítulo 2

# Influencia del fluido oscuro en la evolución de objetos espaciotemporales.

Nuestro conocimiento del Universo actual es más bien oscuro debido a que sabemos muy poco de la mayor parte de la energía que lo compone. Incluso más desconcertante es el hecho de que, ya que en el mundo que nos rodea no apreciamos ninguna influencia de la energía oscura, parece lógico pensar que ésta o bien no existe o sólo interacciona con las sustancias conocidas mediante sus efectos gravitatorios; sugiriendo que a grandes rasgos su única consecuencia observable sería la que originó su consideración, es decir, la expansión acelerada. Sin embargo, este no sería el caso si dichos efectos gravitatorios de la energía oscura influyeran en la evolución de objetos astronómicos cuya propia existencia se basa en los efectos gravitatorios extremos o en la consideración de un cierto tipo de esta sustancia desconocida, abriéndose la puerta a observaciones astronómicas adicionales que pondrían a prueba sus características.

Los agujeros negros evidencian las consecuencias más fascinantes de la relatividad general, ya que estos objetos curvan el espaciotiempo de forma tal que cualquier sustancia cercana se mueve hacia ellos resultando finalmente acretada en su interior. Por lo tanto, se podría pensar que, en este caso, la atracción es tan fuerte que incluso una sustancia con características anti-gravitatorias no podría escapar y sería engullida por el agujero negro. Se debe destacar que la energía oscura cubre todo el espaciotiempo, por lo que un proceso de este tipo tendría que tener lugar necesariamente, estableciéndose un flujo de energía hacia el agujero. Incluso si se quisiera obviar la posible presencia de dicho flujo, el hecho de que el fluido se encuentre por todas partes daría lugar a que al crecer el agujero negro, debido a la acreción de cualquier otra

sustancia, este fluido quedaría “englobado” por el agujero que sufriría los efectos de tal proceso; es más, si estos efectos condujeran a un crecimiento mayor del agujero, el proceso se repetiría indefinidamente. Sin embargo, Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [14] estudiaron la acreción de un fluido con una ecuación de estado arbitraria en un agujero negro indicando que este flujo existiría incluso en el caso más anti-gravitatorio posible, el caso en el que el fluido fuera energía fantasma. Entonces la evolución del agujero negro sería muy diferente de las comúnmente consideradas [118], ya que, como consecuencia de la acreción de energía fantasma, el agujero negro decrecería pudiendo llegar a desaparecer en el gran desgarramiento final independientemente de cual fuera su masa inicial. Como ellos mismos señalaron, esto hecho inesperado no contradice el teorema de la masa de los agujeros negros, porque la energía fantasma simplemente no cumple una de las condiciones en las que dicho teorema se deriva, la condición de energía nula.

Por otro lado, la posible existencia de los agujeros de gusano que puedan ser utilizados como atajos entre dos regiones del universo o dos universos distintos, estaría dotada de mayor credibilidad si la energía fantasma fuera el tipo de energía oscura presente en nuestro Universo, ya que esta energía cumple los requerimientos exóticos necesarios para la estabilidad de dichos atajos. De hecho, Sushkov y Lobo, independientemente en las Refs. [9] y [10], evidenciaron como la energía fantasma podría estabilizar los agujeros de gusano. Siguiendo este espíritu González-Díaz consideró la posible acreción de energía fantasma por agujeros de gusano, llegando a la conclusión de que un proceso de este tipo podría llegar a tener efectos incluso a escalas cosmológicas, ya que el crecimiento de los agujeros de gusano parecería ser tan enorme que podrían llegar a ser más grandes que el propio universo, emprendiendo este un gran viaje (o big trip) [13].

Dadas las posibles consecuencias del proceso de acreción de energía oscura en agujeros negros y de gusano, y que éste fenómeno es capaz de distinguir entre distintos tipos de energía oscura aportándonos, por tanto, información a este respecto, es de especial interés estudiar dicho proceso más detenidamente con el objetivo de comprobar si las implicaciones mencionadas son un simple resultado de las aproximaciones utilizadas. Por esta razón, en la sección 2.1 repasaremos brevemente el estudio de Babichev y col., [14], señalaremos sus consecuencias e indicaremos que tipos de generalizaciones parecen necesarias para un estudio más riguroso del proceso. Así, en 2.1.1 presentaremos una generalización no estática del método mencionado, [15], y en 2.1.2 un primer acercamiento al proceso de acreción que podría tener en cuenta los efectos cosmológicos en el proceso, [17]. Mientras que la primera generalización nos llevará a recuperar los resultados de Babichev y col., siendo estos por lo tanto generalizados a un marco de aplicabilidad mayor, la consideración de una posible influencia de la dinámica del universo en la acreción de agujeros negros nos alertará sobre diferencias cuantitativas con respecto a los métodos previos en el caso en el que los agujeros negros crezcan

durante el proceso. Por otro lado, en la sección 2.2 también revisaremos los resultados obtenidos previamente por González-Díaz en lo relativo a la acreción de energía oscura por agujeros de guano, [13; 119; 120]. En este caso, una generalización dinámica de la geometría utilizada, 2.2.1, nos permitirá tener en cuenta, al menos en principio, la retro-reacción de dicha geometría [18], recuperando, además, los resultados del caso estático en el límite asintótico.

Dado que el estudio del proceso de acreción en estos objetos astronómicos ha generado cierta polémica, en la sección 2.3 resumiremos los trabajos más relevantes al respecto, argumentaremos la consistencia de nuestros resultados y trazaremos posibles líneas futuras de investigación. Finalmente, en la sección 2.4, incluiremos las conclusiones así como ciertos comentarios relevantes, como la posible aplicación de nuestro método en modelos 5-dimensionales, [16].

## 2.1. Acreción de energía oscura en agujeros negros.

Como se ha mencionado, el primer estudio de la acreción de energía oscura por agujeros negros fue realizado por Babichev y col. [14] (véase también Ref. [12]). En este trabajo los autores, inspirados en el método de acreción relativista de Michel, [121], consideran la acreción en el caso de simetría esférica y densidad de energía oscura lo suficientemente pequeña como para que el espaciotiempo pueda ser descrito por medio de la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1.1)$$

donde  $M$  es la masa del agujero negro,  $r$  la coordenada radial y  $\theta$  y  $\phi$  las coordenadas angulares en la 2-esfera. El fluido de prueba acretado puede ser descrito mediante el tensor energía-momento de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.1.2)$$

siendo  $p$  y  $\rho$  la presión y densidad de energía del fluido, respectivamente, las cuales están relacionadas por medio de la ecuación de estado, y  $u^\mu = dx^\mu/ds$  es la 4-velocidad.

En este marco, Babichev y col. [14] integran la componente temporal de la ecuación de conservación del tensor energía-momento,  $T_{0;\mu}^\mu = 0$ , obteniendo la ecuación de Bernoulli relativista

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)^{1/2} ur^2 M^{-2} = C_1, \quad (2.1.3)$$

donde  $C_1$  es una constante de integración,  $u$  es la componente radial de la 4-velocidad y se ha utilizado  $u^\mu u_\mu = 1$  debido a la convención de signos adoptada en la métrica 2.1.1. Ya que, a diferencia de lo que ocurre en el método de Michel [121], en el caso de la energía oscura no tendría sentido una conservación de las partículas, Babichev y col. [14] obtienen la segunda integral de movimiento a partir de la proyección en la 4-velocidad de la ecuación de conservación del tensor energía-momento,  $u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , que en el caso de un fluido perfecto se reduce a

$$u^\mu \rho_{;\mu} + (p + \rho) u^\mu_{;\mu} = 0, \quad (2.1.4)$$

produciendo

$$ur^2 M^{-2} e^{\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} = -A. \quad (2.1.5)$$

Como estamos describiendo el flujo entrante en el agujero ( $u < 0$ ) la constante de integración  $A$  será mayor que cero. A partir de (2.1.3) y (2.1.5) se puede obtener la siguiente expresión

$$(p + \rho) \left( 1 - \frac{2M}{r} + u^2 \right)^{1/2} e^{-\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} = C_2, \quad (2.1.6)$$

con  $C_2 = -C_1/A = \rho_\infty + p(\rho_\infty)$ . Se debe señalar que la constante  $A$  que, como veremos a continuación, tiene gran influencia en el flujo, se relaciona con las condiciones de contorno mediante la siguiente expresión

$$\frac{A}{4} \frac{\rho_h + p(\rho_h)}{\rho_\infty + p(\rho_\infty)} = \frac{A^2}{16u_h^2} = e^{2 \int_{\rho_\infty}^{\rho_h} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}}, \quad (2.1.7)$$

obtenida a partir de (2.1.3) y (2.1.5) mediante una evaluación en el horizonte expresada por el subíndice  $h$ .

Finalmente, el cambio de la masa del agujero negro esféricamente simétrico debido a la acreción,  $\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^r$  se puede expresar, mediante (2.1.5) y (2.1.6), como [14]

$$\dot{M} = 4\pi A M^2 [\rho_\infty + p(\rho_\infty)]. \quad (2.1.8)$$

Esta expresión, donde explicitamos la constante de integración  $A > 0$ , evidencia que el decrecimiento o crecimiento de la masa de un agujero negro debido al proceso de acreción se relaciona de forma directa con la violación o el cumplimiento de la condición de energía nula, respectivamente. Como Babichev y col. comentaron [12; 14], la determinación de la constante  $A$  mediante los métodos utilizados en el caso no oscuro, podría no estar bien definida en el presente estudio; sin embargo, el valor de dicha constante se puede determinar considerando que la velocidad de acreción debería ser máxima en el horizonte, es decir  $u_h \rightarrow -1$ , dando como resultado  $A = 4$ .



Por otra parte, los autores consideran un modelo cosmológico fantasma en el que el fluido puede ser parametrizado por la ecuación de estado  $p = w\rho$ , con  $w < -1$  constante. La ecuación de conservación de este fluido en un universo homogéneo e isótropo implica  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$  que, combinada con la ecuación de Friedmann al suponer que el comportamiento del universo podría aproximarse considerando tan solo esta única componente, produce

$$\rho_\infty = \rho_{\infty,0} \left[ 1 + (1+w)\sqrt{6\pi\rho_{\infty,0}}(t-t_0) \right]^{-2}, \quad (2.1.9)$$

donde el subíndice  $\infty$  se refiere a la consideración de un fluido cosmológico a distancias suficientemente alejadas del agujero negro y cuyo significado será mejor comprendido a continuación. Un modelo de este tipo alcanzará una singularidad conocida como “big rip” o gran desgarro en la que tanto la densidad de energía como el factor cósmico de escala divergirán, [4], en un tiempo finito dado por

$$t_{\text{br}} = t_0 + \frac{1}{|w+1|\sqrt{6\pi\rho_0}}. \quad (2.1.10)$$

La Eq. (2.1.8) puede ser integrada si se considera que el fluido de prueba se comporta en el límite asintótico como el anteriormente descrito, dando lugar a una ecuación de evolución para la masa del agujero negro

$$M(t) = M_0 \left[ 1 + \frac{4\pi A\rho_0 M_0 |1+w|(t-t_0)}{1 - (6\pi\rho_0)^{1/2} |1+w|(t-t_0)} \right]^{-1}. \quad (2.1.11)$$

De esta forma Babichev y col. [12; 14] encontraron un resultado sorprendente, no sólo la masa de los agujeros negros decrecería por la acreción de energía fantasma, si no que dichos agujeros, independientemente del valor de su masa inicial, tenderían a desaparecer en la singularidad futura que marca el final catastrófico de un modelo cósmico de este tipo. Tal como los autores señalaron, este proceso de disminución de la masa de los agujeros negros debido a su tamaño, no está contemplado por el teorema del área de los agujeros negros ya que éste se deduce en condiciones de cumplimiento de la condición de energía nula [86]. Es más, el carácter de membrana unidireccional presente en estos agujeros [74] no evitaría dicho proceso sino que, al contrario, lo haría inevitable e irreversible.

Este trabajo merece varios comentarios, tanto por el método utilizado como por sus posibles implicaciones. En primer lugar se puede notar que el valor de  $A$  obtenido por Babichev y col. depende fuertemente de la consideración de un fluido de prueba homogéneo, en el que la suma de la presión más la densidad de energía evaluada en los dos límites del espacio exterior de Schwarzschild produzca un cociente igual a la unidad, Eq. (2.1.7). Aunque, en principio, esta restricción es lógica por el esquema de

prueba utilizado, se puede destacar que, ya que en la expresión de la variación de la masa del agujero negro (2.1.8) sólo están involucradas funciones del fluido evaluadas en el infinito, es posible considerar un fluido no-homogéneo con un comportamiento asintótico dado. En este caso el valor de  $A$  variaría con respecto al totalmente homogéneo aunque, recordando que la energía oscura es postulada como un fluido que cubre todo el espaciotiempo de la forma más homogénea posible, se podría pensar que el cociente  $[\rho_H + p(\rho_H)] / [\rho_\infty + p(\rho_\infty)]$  no debería tomar valores mucho mayores, así que  $A$  no se desviase demasiado del valor 4 considerado. En cualquier caso, para un fluido fantasma en el que la evolución de su densidad de energía en el infinito, por lo tanto a  $r$  fijo, esta dada por la Eq. (2.1.9), cabe destacar que el desvanecimiento de los agujeros negros en el gran desgarró no depende del valor particular de  $A$  siempre que éste sea no-nulo y finito, como debe ser.

Por otro lado, si consideráramos un modelo cosmológico de energía oscura similar al utilizado por Babichev y col. [12; 14] pero con  $w > -1$ , obtendríamos un universo que crecería con el tiempo con un ritmo menor que el exponencial y, por lo tanto, sin dar lugar a ninguna singularidad a un tiempo finito; la densidad de energía decrecería con el tiempo aunque más lentamente de lo que lo haría la materia ordinaria. Cuando el fluido de prueba se comporta como este fluido cosmológico, Eq. (2.1.9), a una distancia suficientemente grande del agujero negro, obtenemos una expresión similar a la Eq. (2.1.11) pero con el signo cambiado en los términos en los que aparece  $|1 + w|$ . Por lo tanto, como señalamos en la Ref. [15], parecería que el crecimiento de los agujeros negros sería tan rápido como para producir un agujero negro de masa y tamaño infinitos en un intervalo de tiempo finito dado por

$$t_{bs} - t_0 = \frac{1}{[4\pi A \rho_0 M_0 - (6\pi \rho_0)^{1/2}](1 + w)}, \quad (2.1.12)$$

siendo por lo tanto el propio universo absorbido por un agujero negro. Sin embargo, se podría pensar que un fenómeno de este tipo debería ser consecuencia del uso de una métrica estática 2.1.1 en el método de Babichev y col. [12; 14] que, por lo tanto, no es capaz de describir un flujo interno de energía. Así, dicho método sería válido solamente en situaciones en que la tasa de acreción fuera pequeña y no cuando dicha tasa pudiera llegar a ser tan increíblemente grande como para producir un proceso de este tipo.

Siguiendo este espíritu, una generalización del método de Babichev y col. en la que la métrica presentara una componente del tensor energía-momento generado por la geometría  $\Theta_0^r$  distinta de cero, tendría en cuenta al menos el flujo de energía durante el proceso de acreción, [15]. En este caso, aunque el tratamiento aún sería aproximado con un fluido de prueba, válido siempre que la densidad de energía fuera lo suficientemente baja, cabría esperar que los resultados fueran aplicables a tasas de acreción mayores, al menos si el fluido acretado tiene  $w > -1$ , donde la restricción de una

densidad de energía baja se cumplirá cada vez mejor, siendo éste precisamente el caso que nos permitiría estudiar el posible crecimiento excesivo de los agujeros negros arriba mencionado.

Por otro lado, sería posible pensar que la utilización de una métrica asintóticamente plana estaría obviando algún posible efecto debido a la dinámica del universo que influyera en el proceso de acreción ya que, como nuestro universo se expande de forma acelerada en la actualidad, una métrica de este tipo no tendría en cuenta los efectos de esta aceleración en el proceso. Por lo tanto, también será necesario realizar al menos una primera aproximación en la que se considere un espaciotiempo que pueda describir una evolución cosmológica consistente con las observaciones, para ver si los resultados podrían modificarse en un marco más realista, [17].

### 2.1.1. Flujo de energía no-nulo: ¿Engullirá un agujero negro al Universo?

En el resumen anteriormente presentado del trabajo de Babichev y col. [12; 14] se puede notar que mientras que  $M$  es considerada en principio como una constante en la métrica (2.1.1), finalmente se permite su dependencia temporal para la obtención de su evolución con el tiempo. Por lo tanto, es fácilmente deducible que una extensión del método de Babichev y col. [12; 14] que considere agujeros negros dinámicos será más apropiada para el estudio de este fenómeno. Así, la consideración de una métrica no estática nos permitirá, como se ha mencionado, tener en cuenta la reacción del agujero negro ante el proceso de acreción, pudiendo considerarse las implicaciones de su estudio aplicables a tasas de acreción mayores que las presentadas en las Refs. [12; 14].

La métrica más simple que contiene una dependencia temporal suficiente como para inducir una componente del flujo de energía interno no nulo en el agujero negro ( $\Theta_0^r \neq 0$ ), superando la aproximación anteriormente mencionada, será una en la que la masa del agujero negro contenga una dependencia temporal arbitraria. Por lo tanto, generalizamos la métrica de Schwarzschild de la siguiente forma [15]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M(t)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1.13)$$

donde  $M(t)$  debe ser dejada libre ya que es precisamente la función que queremos obtener. Siguiendo un método similar al de Babichev y col. [14], consideramos que el tensor energía-momento de la energía oscura toma la forma del de un fluido perfecto, dado por la Eq. (2.1.2), permitiendo una dependencia arbitraria de sus componentes temporal y radial, e integramos con respecto a la coordenada radial la componente

temporal de la ecuación de conservación de dicho tensor,  $T_{0;\mu}^\mu = 0$ , que en este caso no se corresponderá a la ecuación relativista de Bernoulli. De esta forma, obtenemos

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)^{1/2} ur^2 M^{-2} e^{\int_\infty^r f(r',t) dr'} = C_1(t), \quad (2.1.14)$$

donde  $C_1(t)$  es una función dependiente del tiempo con dimensiones de una densidad de energía y

$$f(r, t) = \frac{\partial_0 T_0^0}{T_0^r} - \frac{4\pi r}{1 - 2M/r} (T_0^0 - T_r^r). \quad (2.1.15)$$

con  $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$ .

La segunda ecuación de movimiento se obtiene integrando radialmente la proyección de la ecuación de conservación del tensor energía-momento sobre la 4-velocidad,  $u_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ , y resulta ser

$$ur^2 e^{\int_\infty^r \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} e^{\int_\infty^r g(r',t) dr'} = -A(t), \quad (2.1.16)$$

donde

$$\begin{aligned} g(r, t) = & \frac{(1 - 2M/r + u^2)^{1/2}}{(1 - 2M/r)u} \frac{\partial_0 \rho}{p + \rho} + \frac{\dot{M}(1 - 2M/r + 2u^2)}{ur(1 - 2M/r)^2(1 - 2M/r + u^2)^{1/2}} \\ & + \frac{\partial_0 u}{(1 - 2M/r)(1 - 2M/r + u^2)^{1/2}} \quad , \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

donde  $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$  y  $A(t)$  debe ser una función del tiempo positiva ya que (2.1.16) describe un flujo entrante ( $u < 0$ ). Para calcular dicha función, que está especialmente relacionada con el flujo, podemos evaluar la Eq. (2.1.16) en el límite asintótico, obteniendo  $A(t) = -\lim_{r \rightarrow \infty} ur^2 > 0$ ; por lo tanto  $A(t)$  no es una función explícita de  $t$ , ya que  $r$  no lo es en el caso considerado por la Eq. (2.1.13) y  $u$  depende de  $t$  sólo a través de  $M$ . Así, ya que  $A(t)$  deberá tener dimensiones de (metros)<sup>2</sup>, ésta función deberá tomar la forma  $A(t) = M^2 A'$  con  $A'$  una constante. Por otro lado, a tasas de cambio bajas, las ecuaciones de movimiento obtenidas hasta ahora deberán reducirse a las calculadas en el caso estático; en particular, en este límite, la Eq.(2.1.16) se reducirá a la Eq.(2.1.5) con lo que  $A' = A$ . Ya que  $A'$  es una contante, esta igualdad deberá mantenerse cuando no nos encontremos en dicho límite particular.

Por otra parte, a partir de las Eqs. (2.1.14) y (2.1.16) se puede obtener

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)^{1/2} e^{-\int_\infty^r \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} e^{-\int_\infty^r dr' [g(r',t) - f(r',t)]} = C_2(t), \quad (2.1.18)$$

donde  $C_2(t) = -C_1(t)/A = p(\rho_\infty(t)) + \rho_\infty(t)$ . Se debe recalcar que aquí tanto  $C_1(t)$  como  $C_2(t)$  son funciones del tiempo, lo que implica que a una distancia infinitamente

lejana al agujero negro la densidad de energía del fluido debe tener una evolución temporal, mientras que en el método desarrollado por Babichev y col. [12; 14] las constantes con el mismo nombre que aparecían en la correspondiente Eq. (2.1.6) implicaban una densidad de energía constante en el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, aunque en el formalismo que está siendo desarrollado también se considera un fluido de prueba, dicho formalismo es consistente desde un principio con una evolución temporal de éste así como con un cambio de la masa del agujero negro y, por consiguiente, tanto el flujo como la reacción de la geometría a éste están siendo tenidos en cuenta.

El cambio de la masa del agujero negro se puede expresar en función del flujo de energía oscura como

$$\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^r, \quad (2.1.19)$$

donde hemos tenido en cuenta la simetría esférica. Esta ecuación, considerando la expresión del tensor energía-momento (2.1.2), puede ser re-expresada como

$$\dot{M} = -4\pi r^2 u(p + \rho) \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)^{1/2}; \quad (2.1.20)$$

y, teniendo en cuenta las Eqs. (2.1.16) y (2.1.18), [15]

$$\dot{M} = 4\pi A M^2 [p(\rho_\infty(t)) + \rho_\infty(t)] e^{-\int_\infty^r f(r', t) dr'}. \quad (2.1.21)$$

Aunque desconozcamos el valor específico de la integral que aparece en la exponencial del lado derecho de esta expresión, dicha exponencial deberá ser siempre positiva, con lo que el signo de  $\dot{M}$  dependerá del signo de  $[p(\rho_\infty(t)) + \rho_\infty(t)]$ . Así, la generalización del método de acreción presentado en este apartado recupera cualitativamente las conclusiones principales del estudio de Babichev y col. que son el crecimiento de los agujeros negros cuando estos acretan una sustancia que cumple la condición de energía nula, al menos en el límite asintótico, y su decrecimiento si esta condición es violada en dicho límite, manteniéndose su masa contante en el caso en el que  $[p(\rho_\infty(t)) + \rho_\infty(t)] = 0$ , equivalente a una constante cosmológica<sup>1</sup>.

Es más, en el caso físicamente relevante en el que consideremos un observador lo suficientemente alejado del agujero negro para no sentir sus efectos, es decir, para un observador asintótico a  $r \rightarrow \infty$ , la Eq. (2.1.21) se reduce a

$$\dot{M} = 4\pi A M^2 [\rho_\infty + p(\rho_\infty)], \quad (2.1.22)$$

que es la misma que la Eq.(2.1.8), aunque en este caso se haya utilizado una métrica no estática dada por la Eq.(2.1.13). Por lo tanto, en este límite, los resultados sobre

---

<sup>1</sup>La conclusión relativa a la no acreción de energía oscura en el caso particular de que ésta sea una constante cosmológica era predecible desde el inicio, ya que en este caso se considera una “energía de vacío” estática que, por lo tanto, no debería inducir ningún flujo.

el desvanecimiento de los agujeros negros en el gran desgarro en modelos fantasmas y sobre un posible crecimiento extremo de los agujeros negros en el caso en que  $p + \rho > 0$  serán también recuperados cuantitativamente<sup>2</sup>.

Por otro lado, en lugar de integrar la Eq. (2.1.22) teniendo en cuenta una evolución asintótica de un fluido de prueba particular, es posible obtener una expresión de la evolución temporal de la masa del agujero negro general siempre que se considere un fluido de prueba cosmológico [16]. Por lo tanto, si consideramos que el comportamiento del fluido a una distancia suficientemente alejada del agujero negro será similar a la de uno que pueda describir una evolución cosmológica coherente, la suma de su presión y su densidad de energía se puede expresar como

$$p_\infty + \rho_\infty = -\frac{1}{\sqrt{24\pi}}\rho_\infty^{-1/2}\dot{\rho}_\infty, \quad (2.1.23)$$

donde se han utilizado la ecuación de Friedmann  $H^2 = 8\pi\rho/3$  y la ecuación de conservación de la energía cósmica en un modelo homogéneo e isótropo,  $\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0$ . Ahora, si se integra la Eq. (2.1.22) teniendo en cuenta (2.1.23), se obtiene

$$M(t) = \frac{M_0}{1 + \sqrt{\frac{8\pi}{3}}AM_0 \left[ \rho_\infty(t)^{1/2} - \rho_{\infty,0}^{1/2} \right]}, \quad (2.1.24)$$

que puede ser re-escrita en términos del parámetro de Hubble del modelo cosmológico cuyo fluido tiene una evolución temporal similar a la de nuestro fluido de prueba en el infinito, como [16]

$$M(t) = \frac{M_0}{1 + AM_0 [H(t) - H_0]}. \quad (2.1.25)$$

En el caso en el que se considere que el fluido acretado es energía oscura con  $p_\infty + \rho_\infty > 0$ , la masa del agujero negro crecerá con el tiempo y con ella su tamaño. Se podría pensar, como se ha indicado anteriormente, que este crecimiento fuera tal que el agujero llegara a ser infinitamente grande en un intervalo de tiempo finito (2.1.12). Sin embargo, lo que ahora procede es comprobar como los datos obtenidos de las observaciones fijan o evitan este fenómeno potencial.

Como se ha señalado, la consideración de un fluido de prueba cosmológico produce una evolución de la masa de un agujero negro debida al proceso de acreción expresada en términos del parámetro de Hubble del modelo correspondiente por medio de la

---

<sup>2</sup>Cabría esperar que la razón de cambio de la masa del agujero negro no dependiese del radio al que se sitúa el observador. Si esto no fuera así, se debería a la aproximación del fluido de prueba que se está utilizando aunque, como comentaremos más adelante, no tenemos porque esperar ningún efecto inconsistente en este sentido proveniente de dicha aproximación. De esta forma, considerar a la Eq. (2.1.8) válida para todo observador es equivalente a demandar  $f(r, t) = 0$ .

Eq. (2.1.25). Asumiendo que la evolución de la masa de un agujero negro contenido en nuestro universo tomaría la misma forma, y considerando un modelo en el que la condición de energía nula se cumple, de forma que esta masa es una función creciente del tiempo, podemos pensar que un agujero negro sería capaz de absorber el universo siempre que  $M_0 > M_*$ , siendo  $M_*$  la masa actual de un agujero cuyo tamaño tiende a infinito en el límite  $t \rightarrow \infty$ . En modelos de energía oscura de este tipo, el parámetro de Hubble decrece con el tiempo pudiendo tender a cero para tiempos infinitamente grandes, con lo que, introduciendo este límite en la Eq. (2.1.25), se puede obtener fácilmente  $M_* = 1/(AH_0)$ . Ahora, teniendo en cuenta una constante  $A$  del orden de la unidad, para no entrar en desacuerdo con las consideraciones de Babichev y col.<sup>3</sup>, [12; 14], y  $H_0 \sim 10^{-26}(\text{metros})^{-1}$ , según los datos proporcionados por el WMAP [50], se obtiene  $M_* \sim 10^{23}M_\odot$ , [15; 16]. Por lo tanto, un agujero negro que fuera capaz de engullir al universo en un tiempo finito debería posser ahora una masa  $M_0 > 10^{23}M_\odot$ . De esta forma, se puede concluir que a partir de los datos observacionales y para agujeros negros de masas solares o los super-masivos con  $\sim 10^{10}M_\odot$ , la acreción de energía oscura con  $w > -1$ , constante o no, produce un crecimiento suave de estos agujeros negros, excluyendo totalmente la posibilidad de un fenómeno catastrófico como el considerado. Debemos destacar que si el parámetro de Hubble tendiera a un valor mínimo no nulo, tendríamos  $M_* = 1/[A(H_0 - H_\infty)] > 1/(AH_0)$  al ser  $H$  una función decreciente, con lo que la masa actual de un agujero negro que fuera capaz de engullir al universo en tiempo finito debería ser incluso mayor que en el caso anterior.

Por otro lado, si de forma similar consideramos un fluido fantasma,  $p_\infty + \rho_\infty < 0$ , entonces la masa de los agujeros negros decrecería. Es más, en modelos en los que se alcance una divergencia del parámetro de Hubble en tiempo finito en el futuro, la Eq. (2.1.25) nos dice que este decrecimiento será tal que los agujeros negros tenderían a desaparecer en ese momento, independientemente del valor de su masa inicial, como ya había sido adelantado por Babichev y col. en el caso del gran desgarró [14]. Por otra parte, si se considerasen modelos fantasmas en los que el parámetro de Hubble tendiera monótonamente a un valor máximo finito, la masa de los agujeros negros decrecería asintóticamente tendiendo a un valor mínimo no-nulo.

Los comentarios presentados en los dos párrafos anteriores son válidos para un parámetro  $w$  arbitrario, no necesariamente constante, siempre que éste no cruce el valor límite  $-1$ . Si consideráramos que  $w > -1$  pero  $\dot{w} < 0$ , entonces pasaríamos de tener un fluido no fantasma a uno que lo es. En este caso, ya que el desvanecimiento de los agujeros negros en una singularidad sólo dependería de que en ésta el parámetro de Hubble tendiera a infinito (véase Eq. (2.1.25)), éste resultado se mantendría. Por

---

<sup>3</sup>Como ya hemos indicado, aunque sea de esperar que el valor de esta constante no sea exactamente  $A = 4$ , ésta no se debería desviar significativamente de este valor.

el contrario, si consideramos un modelo fantasma que evolucionara hacia valores de cumplimiento de la condición de energía nula,  $w < -1$  y  $\dot{w} > 0$ , las consideraciones anteriores sobre el crecimiento no excesivo de los agujeros negros se seguirían cumpliendo, ya que un agujero negro que pudiese dar lugar a un futuro catastrófico debería tener un tamaño actual incluso mayor para poder disminuir su masa durante la fase fantasma, llegando al cambio de fase con una masa superior a las mencionadas anteriormente.

Se debe tener en cuenta que estas conclusiones se han derivado en el caso de un observador suficientemente alejado del agujero negro para no sufrir sus efectos, que parece ser nuestro caso al menos hoy en día. Se podría pensar que la consideración de este límite asintótico esta escondiendo ciertas inconsistencias y que, en otros límites, el comportamiento del agujero negro sería diferente. No obstante no parece que éste sea el caso, ya que evaluando (2.1.20) en el horizonte obtenemos la expresión simple

$$\dot{M} = 16\pi M^2 [p(\rho_h) + \rho_h], \quad (2.1.26)$$

donde se ha considerado una velocidad límite del flujo en el horizonte, es decir  $u_h \rightarrow -1$ . De esta expresión se pueden extraer las mismas conclusiones que de la Eq. (2.1.21) respecto al crecimiento (decrecimiento) de los agujeros negros al acretar energía oscura con  $w > -1$  ( $w < -1$ ). Es más, si asumimos un buen comportamiento del modelo utilizado y la no aparición de ningún fenómeno inesperado inconsistente en las cercanías del agujero negro, la tasa de cambio de la masa debería ser igual vista desde un punto infinitamente lejos del agujero (2.1.8) que desde otro infinitamente cerca (2.1.26). De esta forma obtendríamos una expresión que relacionaría la constante del flujo  $A$  con la presión y densidad de energía del fluido

$$\frac{p(\rho_h) + \rho_h}{p(\rho_\infty) + \rho_\infty} = \frac{A}{4}, \quad (2.1.27)$$

similar a la presentada por Babichev y col., Eq. (2.1.7). Por lo tanto, si consideramos que la ecuación de estado efectiva del fluido no varía apreciablemente con respecto a la posición, tendríamos  $A = 4\Omega_h/\Omega_\infty$ , siendo  $\Omega$  el parámetro de la fracción de energía oscura con respecto a la crítica. Así, nuestra consideración de un valor de  $A$  del orden de la unidad viene justificado ya que no se esperaría una variación excesiva de este cociente con respecto a la unidad. Es más, aunque consideráramos que dicho cociente pudiera tomar valores mucho mayores, para que un agujero negro super-masivo con  $M_0 \sim 10^{10}M_\odot$  llegara a ser infinitamente grande en un tiempo finito, deberíamos tener  $\Omega_h > 10^{13}\Omega_\infty$ . Por supuesto podría utilizarse la Eq. (2.1.26) para el estudio de la evolución del agujero negro, evitando posibles discusiones sobre la constante  $A$ , aunque para nuestros propósitos parece más conveniente la aproximación de un fluido cósmico de prueba en el límite asintótico.



Finalmente, se debe señalar que en nuestro estudio se considera desde un principio la posible dependencia temporal de la masa del agujero negro a través de (2.1.13), pero el espaciotiempo dado por la métrica (2.1.13) es todavía una solución de vacío, con  $\Theta_{00} = \Theta_{rr} = 0$ , por lo que la energía oscura sigue siendo considerada como un fluido de prueba, haciendo que el método sea válido cuando la densidad de energía es suficientemente baja; pero es precisamente en el caso de la energía oscura con  $w > -1$ , el cual produce un decrecimiento de la densidad de energía con el tiempo, en el que este tratamiento cobraría un interés especial. Por otro lado, esta métrica produce una componente  $\Theta_{0r} \neq 0$  que, a través de la ecuación de Einstein correspondiente [122], implicaría precisamente la Eq. (2.1.19).

### 2.1.2. Aproximación al caso cosmológico.

En los modelos de acreción de energía oscura en agujeros negros presentados previamente se considera que el espaciotiempo es plano a una distancia lo suficientemente grande del agujero negro, límite en el que se utiliza un fluido cósmico de prueba. Dicho fluido es elegido de esta forma ya que se espera que sea uno de este tipo el preponderante en nuestro Universo acelerado [50]. Sin embargo, precisamente a distancias alejadas del agujero negro es donde esta aceleración podría producir efectos en la geometría no sólo debidos directamente a su dinámica sino también indirectamente por la posible aparición de horizontes cosmológicos. Por lo tanto, parece necesario estudiar el proceso de acreción en un escenario cósmico que pueda ser consistente con la expansión acelerada del Universo.

Con este propósito en la Ref. [17] consideramos que el espaciotiempo se puede describir mediante una métrica de Schwarzschild-de Sitter. Esta es

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - r^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.1.28)$$

con

$$\Delta(r) \equiv r^2 \left( 1 - \frac{r^2 \Lambda}{3} - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.1.29)$$

Los posibles horizontes de este espacio serán los ceros de la función  $\Delta$ . La ecuación  $\Delta = 0$  tiene sólo una solución real que es negativa si  $3M\Lambda^{1/2} > 1$ , una solución real negativa y dos soluciones iguales positivas si  $3M\Lambda^{1/2} = 1$  y, si  $3M\Lambda^{1/2} < 1$ , posee una solución real negativa y dos soluciones reales positivas distintas. En el último caso,  $3M\Lambda^{1/2} < 1$ , las dos soluciones reales positivas, que son singularidades de coordenadas de la métrica (2.1.28), pueden ser consideradas como dos horizontes [123], uno del agujero negro  $r_{bh}$  y otro cosmológico  $r_c$ , definidos mediante las expresiones

$$r_{bh} = \frac{2}{\Lambda^{1/2}} \cos \left[ \frac{\arccos(-3M\Lambda^{1/2})}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] \quad (2.1.30)$$

y

$$r_c = \frac{2}{\Lambda^{1/2}} \cos \left[ \frac{\arccos(-3M\Lambda^{1/2})}{3} \right]. \quad (2.1.31)$$

A la vista de estas expresiones, se puede notar [123] que cuanto mayor sea  $M$  mayor será el área del horizonte del agujero negro y menor la del horizonte cosmológico, destacando que si la masa fuera tan grande como para alcanzar el valor límite  $3M\Lambda^{1/2} = 1$ , estos dos horizontes se reducirían a uno. Por el contrario, si se considera una masa menor,  $r_{bh}$  será menor y  $r_c$  mayor; en el otro caso límite  $M = 0$ , el espaciotiempo se reduciría a un de Sitter, desapareciendo el horizonte del agujero negro y tomando el radio del horizonte cosmológico el valor conocido  $\sqrt{3/\Lambda}$ .

Como hemos comentado en la subsección anterior, en un proceso de acreción que pueda tener en cuenta el efecto del flujo de energía en el espaciotiempo deberá ser considerado que  $M$  no es ya una constante, sino una función del tiempo. Por lo tanto, generalizamos la métrica (2.1.28) de forma tal que  $M$  tenga una dependencia temporal arbitraria, precisamente la función que queremos calcular en el presente estudio. En este escenario los dos horizontes (2.1.30) y (2.1.31) ya no serían horizontes de eventos, sino que serían dos horizontes dinámicos<sup>4</sup> presentes en el estado inicial siempre que  $3M_0\Lambda^{1/2} < 1$ .

Si ahora consideramos que el espaciotiempo esta lleno de un fluido con el tensor energía momento de la forma de un fluido perfecto, Eq. (2.1.2), la métrica (2.1.28) con  $M = M(t)$  sólo podrá describir de forma apropiada la reacción a dicho fluido en el caso en el que  $w = -1$ . Sin embargo, y dado que las observaciones de la energía oscura nos dicen que el parámetro de la ecuación de estado debe tomar valores no muy alejados de este valor, supondremos que la métrica de Schwarzschild-de Sitter generalizada podría describir aproximadamente el espaciotiempo generado por una energía oscura dinámica, es decir con  $w \neq -1$ , pero con dicho parámetro tomando valores cercanos a este valor.

Por otro parte, la componente temporal de la ecuación de conservación del tensor energía-momento, en la que permitimos una dependencia temporal y radial arbitraria de su presión, densidad de energía y 4-velocidad, se puede escribir como

$$\frac{\partial_r T_0^r}{T_0^r} + \frac{2}{r} + F(r, t) = 0, \quad (2.1.32)$$

donde

$$F(r, t) = \frac{\partial_0 T_0^0}{T_0^r} + \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \frac{T_r^r - T_0^0}{T_0^r}. \quad (2.1.33)$$

---

<sup>4</sup>En el presente apartado se denominan horizontes dinámicos a aquellas superficies que serían horizontes si consideráramos una foto del proceso. Otras definiciones más precisas de los horizontes dinámicos se pueden encontrar en la Ref. [124] y en las que ésta contiene.

y se debe recordar que  $\Delta = \Delta(r, t)$ . La Eq.(2.1.32) puede ser integrada fijando uno de los límites en un cierto  $r$  perteneciente a la región física,  $r_{bh} \leq r \leq r_c$ . Ya que en el presente escenario hay dos horizontes dinámicos, el otro límite podrá ser el radio de cualquiera de los dos, pudiendo realizar por tanto la integración de Eq. (2.1.32) en dos intervalos distintos: o bien desde el horizonte dinámico cosmológico hasta un observador en  $r$ , o bien desde el agujero negro hasta el mismo observador. El primer procedimiento produce

$$ur^2(p + \rho) \left( u^2 + \frac{\Delta}{r^2} \right)^{1/2} \exp \left( \int_{r_c}^r dr' F(r', t) \right) = D_1(t), \quad (2.1.34)$$

donde  $D_1(t) = -r_c^2(p + \rho)|_{r=r_c}$ , es obtenido haciendo el límite  $r \rightarrow r_c$  y considerando una velocidad máxima del flujo entrante en este límite<sup>5</sup>,  $u_c \rightarrow -1$ . Por otro lado, considerando el segundo intervalo de integración, se obtiene

$$ur^2(p + \rho) \left( u^2 + \frac{\Delta}{r^2} \right)^{1/2} \exp \left( \int_{r_{bh}}^r dr' F(r', t) \right) = D_2(t), \quad (2.1.35)$$

con  $D_2(t) = -r_{bh}^2(p + \rho)|_{r=r_{bh}}$ , por argumentos similares. Por supuesto, la Eq. (2.1.34) debe ser equivalente a la Eq. (2.1.35). Esta equivalencia puede ser comprobada fácilmente evaluando la Eq.(2.1.34) en  $r_{bh}$  y la Eq. (2.1.35) en  $r_c$ ; ambos procedimientos llevan al mismo resultado, que es

$$\frac{r_c^2(p + \rho)|_{r=r_c}}{r_{bh}^2(p + \rho)|_{r=r_{bh}}} = \exp \left( \int_{r_c}^{r_{bh}} dr' F(r', t) \right). \quad (2.1.36)$$

Esta condición, Eq.(2.1.36), no sólo prueba la equivalencia mencionada sino que evidencia que la integral de la función  $F(r, t)$  en el rango considerado debe ser finita, como cabía esperar.

El cambio temporal de la masa del agujero negro debido al proceso de acreción, puede ser derivado a partir de  $\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^r$  ya que existe simetría esférica. Teniendo en cuenta en esta expresión la Eq. (2.1.34) o la Eq. (2.1.35) obtenemos

$$\dot{M} = 4\pi r_c^2(p + \rho)|_{r=r_c} \exp \left( - \int_{r_c}^r dr' F(r', t) \right), \quad (2.1.37)$$

o

$$\dot{M} = 4\pi r_{bh}^2(p + \rho)|_{r=r_{bh}} \exp \left( - \int_{r_{bh}}^r dr' F(r', t) \right), \quad (2.1.38)$$

---

<sup>5</sup>Como se verá más adelante, la posibilidad de fijar el valor de la función  $D_1(t)$  nos permitirá obtener el resultado utilizando sólo una ecuación de movimiento, a diferencia de los casos anteriormente presentados donde una segunda era necesaria para fijar  $C_1$  y  $C_1(t)$ , respectivamente. Este hecho también producirá que nuestro resultado no dependa de una constante del flujo que aparecía en la segunda ecuación del movimiento,  $A$ .

respectivamente. Por supuesto, se debe señalar que la presentación de estas dos ecuaciones no se debe a la suposición de que haya dos expresiones diferentes sino, más bien lo contrario, al considerar que ambos procedimientos son equivalentes el desarrollo de los dos puede ayudar a comprobar la consistencia del método general utilizado.

Evaluando la Eq.(2.1.37) en  $r = r_c$  y la Eq.(2.1.38) en  $r = r_{bh}$ , se obtiene

$$\dot{M} = 4\pi r_c^2 (p + \rho) |_{r=r_c} \quad (2.1.39)$$

y

$$\dot{M} = 4\pi r_{bh}^2 (p + \rho) |_{r=r_{bh}}. \quad (2.1.40)$$

Considerando que debe haber una definición única del cambio de la masa del agujero negro, podemos igualar estas dos expresiones para obtener información de la ecuación de estado del fluido, así como de la relación de la evolución temporal de las cantidades involucradas. De esta forma se tiene

$$\frac{(p + \rho) |_{r=r_c}}{(p + \rho) |_{r=r_{bh}}} = \frac{r_{bh}^2}{r_c^2}, \quad (2.1.41)$$

que, teniendo en cuenta la condición (2.1.36), implica que la integral de  $F(r, t)$  entre los límites del espacio físico es cero. Esta misma conclusión con la integral considerada entre límites distintos podría haberse obtenido igualando Eq. (2.1.37) a la Eq. (2.1.39) (o (2.1.38) a (2.1.40)), ya que la única dependencia radial que tiene la primera estaría en la exponencial. Por lo tanto, para que el cambio en la masa del agujero negro no dependa de  $r$  la función  $F(r, t)$  debe ser cero.

Las ecuaciones (2.1.39) y (2.1.40) nos dicen que, al igual que en el caso anterior asintóticamente plano, la masa del agujero negro crecerá si el fluido acretado cumple la condición de energía nula,  $p + \rho > 0$ , ésta decrecerá si dicho agujero negro acreta un fluido fantasma,  $p + \rho < 0$ , y permanecerá constante en el caso de la constante cosmológica,  $p + \rho = 0$ . Por lo tanto, al menos cualitativamente, no se introduce ninguna corrección a los resultados obtenidos por la consideración de un escenario cosmológico.

Por otra parte, la Eq. (2.1.39) permite obtener la evolución temporal de la masa del agujero negro conociendo sólo la evolución temporal de  $p + \rho$  en  $r = r_c$  sin necesidad de conocer la evolución radial de esta cantidad (lo mismo se podría decir sobre la Eq. (2.1.40) y  $r = r_{bh}$ ). Simplemente se debe integrar

$$\frac{dM}{r_c^2} = 4\pi (p + \rho) |_{r=r_c} dt. \quad (2.1.42)$$

Llegados a este punto consideramos que en  $r = r_c$  la evolución temporal de la densidad de energía del fluido se puede aproximar por

$$\rho|_{r=r_c} = \rho|_{r=r_c,0} [1 + (1 + w)\sqrt{6\pi\rho_{\infty,0}}(t - t_0)]^{-2}, \quad (2.1.43)$$

con  $w = (p/\rho)|_{r=r_c}$  constante, es decir, asumimos que en este horizonte dinámico la evolución temporal será la de un fluido cósmico, recalcando una vez más que este comportamiento es asumido a  $r$  fijo, mientras que en el caso cósmico, al ser homogéneo, se considera en todo el espacio. Introduciendo (2.1.43) en la Eq.(2.1.42), ésta podrá ser integrada teniendo en cuenta la definición de  $r_c$ , Eq. (2.1.31). Así, se obtiene

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\left(\frac{3+2z}{\sqrt{1+z}} - \frac{3+2z_0}{\sqrt{1+z_0}}\right) = \frac{4\pi\rho|_{r=r_c,0}(1+w)(t-t_0)}{1 + \sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}(1+w)(t-t_0)}, \quad (2.1.44)$$

con

$$z = \cos\left[2/3 \arccos(-3M\Lambda^{1/2})\right]. \quad (2.1.45)$$

Se puede definir la variable  $x$  que describirá la evolución de la masa del agujero negro en términos de  $z$  como la expresión inversa de la Eq.(2.1.45)

$$x(z) \equiv 3\sqrt{\Lambda} M(z) = -\cos\left(\frac{3}{2} \arccos z\right) = (1-2z)\sqrt{\frac{1+z}{2}}. \quad (2.1.46)$$

Inspeccionando la Eq. (2.1.45) o la (2.1.46) se puede ver que, ya que  $M$  debe ser no negativa,  $-1 < z < 1/2$ . De hecho,  $x(z)$  es una función creciente en el intervalo de  $z$   $[-1, -1/2]$  donde alcanza su valor máximo,  $x = 1$ , que coincide precisamente con el valor al que ambos horizontes degeneran. Después,  $x$  comienza a decrecer hasta  $x(z = 1/2) = 0$ , es decir, donde el agujero negro se evapora<sup>6</sup>.

Se debe recordar una vez más que este escenario inicial, con la presencia de dos horizontes dinámicos, será posible siempre que  $x_0 < 1$ . En el caso fantasma, en el que la masa del agujero negro decrece con el tiempo, se tiene que  $x(t) \leq x_0 < 1$  para  $t > t_0$ , con lo que se puede pensar que una expansión en serie de Taylor podría ser adecuada para encontrar resultados al menos de forma aproximada. Procediendo de esta manera, se puede obtener

$$x(t) \simeq \frac{x_0}{1 - \frac{4}{3}x_0\sqrt{\frac{16\pi\rho|_{r=r_c,0}}{3\Lambda}}G(t)}, \quad (2.1.47)$$

con

$$G(t) = \frac{\sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}(1+w)(t-t_0)}{1 + \sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}(1+w)(t-t_0)}. \quad (2.1.48)$$

---

<sup>6</sup>Se puede comprobar que, dada la simetría de las funciones involucradas, la misma solución podría haber sido obtenida al considerar que el fluido tomaría la misma forma en el límite del agujero negro, es decir, integrando la Eq. (2.1.40) teniendo en cuenta (2.1.43) en  $r_{bh}$ . En este caso, también se llegaría a la Eq. (2.1.44) pero con  $z = \cos\{2/3 [\arccos(-3M\Lambda^{1/2}) + 4\pi]\}$ , que produciría el mismo resultado ya que  $-\cos(\frac{3}{2} \arccos z - 4\pi) = -\cos(\frac{3}{2} \arccos z)$ . Este hecho puede ser debido a que en nuestra aproximación consideramos que el valor absoluto de la presión del fluido no puede ser muy diferente de su densidad de energía, caso que si se cumpliera estrictamente implicaría la no-acrección.

En este caso,  $1 + w < 0$ ,  $G(t)$  es una función decreciente, con lo que  $x(t)$  también decrecerá hasta anularse en el mismo momento en el que (2.1.43) diverge, es decir

$$t_b = t_0 + \frac{1}{(|1 + w|)\sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}}. \quad (2.1.49)$$

Por lo tanto, los agujeros negros se desvanecerían en el mismo momento en el que la densidad del fluido se hace infinitamente grande. Esta divergencia no implicaría una singularidad del espaciotiempo dado por la métrica (2.1.28), debido a la aproximación utilizada; de hecho, como hemos mencionado, este espaciotiempo es simplemente un espacio de de Sitter en el caso en que  $M = 0$ . Sin embargo, el hecho de que los agujeros negros tiendan nuevamente a desaparecer en el momento en el que en un modelo cosmológico con una evolución similar al fluido de prueba utilizado alcanzara una singularidad, refuerza el argumento de que dicha desaparición podría estar ligada a la consideración de fluidos fantasmas que implicasen un comportamiento cosmológico singular. Se podría pensar que un comportamiento de este tipo no sería posible debido a la conjetura del censor cósmico en su formulación fuerte, [79], esperando que algún proceso ignorado frenase un desvanecimiento tal de los agujeros negros. A este respecto se debe recalcar que este desvanecimiento sólo llegaría a completarse en modelos en los que, en ese momento, todo el universo se encontrara “en” un estado singular, con lo que no sería posible que ningún tipo de información de esta posible singularidad desnuda llegara a ningún observador. Por otra parte, aunque clásicamente la posible desaparición de los agujeros negros debida a la acreción de energía fantasma parece un proceso suficientemente apoyado, se debe tener en cuenta que la consideración de efectos cuánticos podría evitar el desvanecimiento total de estos objetos [62].

Aunque mediante una aproximación de la Eq. (2.1.44) se han podido extraer ciertas conclusiones en lo relativo a la acreción de energía fantasma, es posible encontrar soluciones analíticas a este problema. Para ello, se puede re-escribir dicha Eq. (2.1.44) de la siguiente forma

$$3 + 2z = A(t)\sqrt{1 + z}, \quad (2.1.50)$$

donde  $A(t)$  es

$$A(t) \equiv A_0 - \frac{c_0(t - t_0)}{1 + c_1(t - t_0)}, \quad (2.1.51)$$

con

$$A_0 = \frac{3 + 2z_0}{\sqrt{1 + z_0}} \quad (2.1.52)$$

$$c_0 = 8\pi\rho|_{r=r_c,0}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}(1 + w), \quad (2.1.53)$$

$$c_1 = \sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}(1 + w). \quad (2.1.54)$$

Elevando al cuadrado la Eq. (2.1.50) se obtiene una ecuación con dos soluciones

$$z_{\pm}(t) = \frac{A^2(t) - 12 \pm |A(t)|\sqrt{A^2(t) - 8}}{8}, \quad (2.1.55)$$

sólo una de las cuales será solución de (2.1.50). Puede ser visto que la solución  $z_+$  no está bien definida, ya que  $z_+(t = t_0)$  produciría contradicciones entre el rango de validez de  $z$  y  $A^2 > 8$ . Por lo tanto, la evolución de la masa de los agujeros negros se podrá estudiar a partir de la solución  $z_-(t)$ .

En el caso fantasma, cuando  $t \rightarrow t_b$  la función  $A(t)$  tiende a infinito independientemente de la masa inicial de los agujeros negros, incluida a través de  $z_0$ , lo que produce  $z_-(t) \rightarrow -1$  y  $x(z_-) \rightarrow 0$ , recuperando por tanto el resultado de la evaporación de los agujeros negros en este punto ya obtenido mediante la aproximación (2.1.47).

Por otra parte, si  $w > -1$ , la masa del agujero negro crece y con ella su tamaño, mientras que el horizonte cosmológico dinámico decrece. Este proceso implicará que llegue un momento en el que los dos horizontes coincidan,  $x = 1$ , momento que es función del parámetro de la ecuación de estado

$$t_w = t_0 + \frac{\tau}{1 + w}, \quad (2.1.56)$$

con

$$\tau = \frac{A_0 - 2\sqrt{2}}{8\pi\rho|_{r=r_c,0}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} - \sqrt{6\pi\rho|_{r=r_c,0}}(A_0 - 2\sqrt{2})}. \quad (2.1.57)$$

Por lo tanto, cuanto más próximo esté el valor de  $w$  a  $-1$  mayor será el intervalo de tiempo necesario para que los dos horizontes coincidan, como se debería esperar ya que en el valor límite  $w = -1$  no hay proceso de acreción. Así, en un escenario cosmológico parecería posible que todo el universo acabe englobado por un agujero negro<sup>7</sup>, no sólo por el crecimiento del horizonte de dicho agujero sino también por el decrecimiento del espacio físico, hecho que sería posible precisamente debido a la consideración de un escenario que no es asintóticamente plano.

En este método, hemos tenido en cuenta la posible variación de la masa del agujero negro debido al proceso de acreción desde un principio y la geometría utilizada ya no supone un espaciotiempo vacío. No obstante, la consideración de que la energía oscura es la sustancia que llena el espacio sigue conllevando la utilización de un fluido de prueba aunque, en este caso, no se aleje demasiado de aquél que genera la geometría (2.1.28) con  $M = M(t)$ . Sin embargo, se puede pensar que esta aproximación deja

---

<sup>7</sup>Para más información sobre el espaciotiempo resultante cuando los dos horizontes coinciden, véase [125].

de cumplirse al considerar los efectos extremos que conllevaría la utilización de dicha geometría, aunque lo que sí podría ser señalado a la vista de los resultados, es que la consideración de los efectos cosmológicos tienden a aumentar el crecimiento de los agujeros negros en el caso correspondiente,  $w > -1$ .

Por otra parte, si un tratamiento más riguroso de este fenómeno reprodujera el posible engullimiento del universo por un agujero negro, se debería destacar que este resultado se extrae en un marco clásico. Sería de esperar que los efectos cuánticos suavizaran este fenómeno extremo, produciendo una deceleración del crecimiento del agujero negro y del decrecimiento del espacio físico.

Finalmente debemos destacar que la utilización de un fluido de prueba rompe la equivalencia materia-geometría. Por lo tanto, los resultados obtenidos no serían equivalentes a los que se podrían extraer de un método que considerase la acreción por un agujero de Schwarzschild no-estático de un fluido de prueba que contuviese una contribución de una constante cosmológica [17]. Este segundo caso no tendría realmente en cuenta ningún efecto cosmológico, por lo que se reduciría al tipo de los estudiados en la subsección anterior, simplemente con una expresión de la densidad de energía algo más compleja.

## 2.2. Acreción de energía oscura en agujeros de gusano.

Morris y Thorne, en su famoso trabajo Ref. [101], estudiaron como debería ser una métrica estática y esféricamente simétrica capaz de describir un agujero de gusano que conectase dos regiones asintóticamente planas del espaciotiempo, ya sea del mismo universo o de diferentes universos, sin la presencia de un horizonte ni de singularidades, abriendo así la posibilidad de un viaje inter-estelar. Este trabajo supuso el inicio del desarrollo del estudio de agujeros de gusano lorentzianos y macroscópicos, estables y susceptibles de ser atravesados<sup>8</sup>. Las soluciones de Morris y Thorne tienen la forma [101]

$$ds^2 = e^{2\Phi(l)} dt^2 - dl^2 - r^2(l) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.2.1)$$

donde  $-\infty < l < \infty$  y  $\Phi(l)$  debe ser finita en todo el espacio. El radio de la garganta del agujero de gusano es el mínimo de la función  $r(l)$ ,  $r_0$ , que se puede fijar en  $l =$

---

<sup>8</sup>Como los agujeros de gusano que son objeto de estudio en la presente memoria cumplen estas características, utilizaremos el término agujero de gusano para nombrar a uno que cumpla estas propiedades. En algún momento, nos referiremos a agujeros de gusano inestables, que, por lo tanto, no puedan ser atravesados; en ese caso lo especificaremos explícitamente.



0 sin pérdida de generalidad; por lo tanto  $l < 0$  y  $l > 0$  cubren, respectivamente, las dos regiones asintóticamente planas. Para que estas regiones sean efectivamente asintóticamente planas, los límites de las funciones  $r(l)/|l|$  y  $\Phi(l)$  cuando  $l \rightarrow \pm\infty$  deben ser iguales a la unidad y a una cierta constante, respectivamente. Embebiendo la métrica (2.2.1) en una dimensión espacial extra, se puede entender fácilmente este espaciotiempo (véase Fig (2.1)).

Expresando la Eq. (2.2.1) en términos de la coordenada radial, la métrica se expresa como

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - K(r)/r} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.2.2)$$

donde ahora son necesarios dos mapas de coordenadas para cubrir las dos regiones asintóticamente planas, cada uno con  $r_0 \leq r < \infty$ .  $\Phi(r)$  y  $K(r)$  son la función corrimiento y la función forma, respectivamente, que deben tender a un valor constante en el límite asintótico. El radio mínimo,  $r_0$ , fija la posición de la garganta, donde  $K(r_0) = r_0$  y la superficie embebida es vertical. La distancia propia radial es

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr^*}{\sqrt{1 - K(r^*)/r^*}}, \quad (2.2.3)$$

y debe ser finita en todo el espacio.

El único problema de la métrica estudiada por Morris y Thorne es que el contenido material que generaría una geometría de este tipo debe tener ciertas propiedades fuera de lo común<sup>9</sup>. Notando que la superficie embebida, Fig. (2.1), debe extenderse hacia afuera de la garganta, lo que se conoce como la condición “flaring out” o de extensión hacia afuera, se tiene que  $K'(r) < K(r)/r$  en la garganta y cerca de ella, lo que, a través de las ecuaciones de Einstein, implica  $p_r(r) + \rho(r) < 0$  en esta región, donde  $\rho(r)$  es la densidad del fluido y  $p_r(r)$  es su presión radial. Por lo tanto, alrededor de la boca del agujero de gusano debe haber un material que viola la condición de energía nula al que se denominó energía exótica. Para reducir las posibles características patológicas de la materia exótica se puede requerir  $\rho(r) > 0$ , lo que implica  $K'(r) > 0$  mediante las ecuaciones mencionadas.

Por otro lado, en la Ref. [101] se indican ciertas condiciones adicionales que deberían cumplir las funciones corrimiento y forma para que el viaje a través del agujero de gusano fuera posible en la práctica, como un tiempo de viaje finito y restricciones sobre las fuerzas de marea. Nosotros simplemente trataremos agujeros de gusano que pudieran ser atravesados en principio dada la ausencia de horizontes y singularidades, lo que en la notación de la Ref. [100] es denominado agujeros de gusano “atravesables

---

<sup>9</sup>Estas consideraciones serán tratadas en mayor detalle en la subsección 4.1.1 del Capítulo 4.

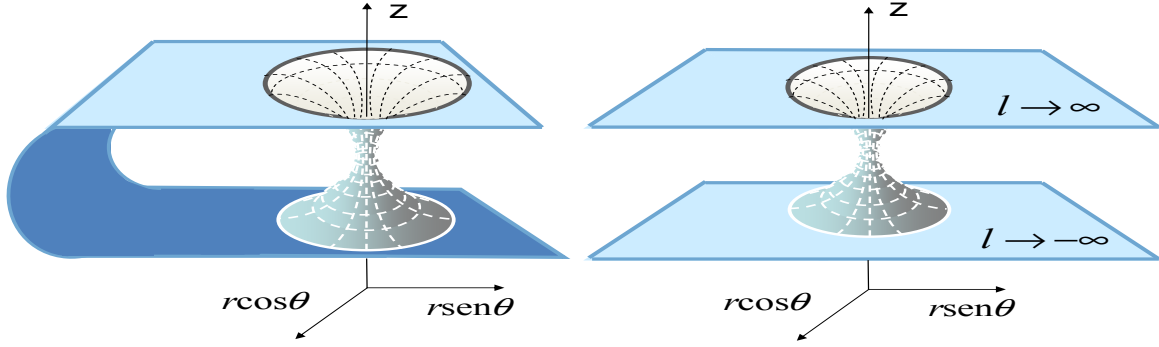


Figura 2.1: Diagrama embebido de una sección  $\theta = \pi/2$  en un momento dado de tiempo  $t = \text{constante}$ . A la izquierda mostramos este diagrama en el caso en el que el agujero de gusano conecta dos regiones del mismo universo. El diagrama embebido de un agujero de gusano que conecta dos universos se presenta a la derecha.

en principio”, refiriéndonos a ellos simplemente mediante el término agujeros de gusano siempre que no sea especificado lo contrario.

La posibilidad de que la expansión acelerada del Universo sea debida a un fluido fantasma que viola la condición de energía nula, ha hecho ganar naturalidad a la consideración de los agujeros de gusano como posibles realidades existentes en nuestro universo, ya que en este tipo de modelos no sólo nos encontraríamos ante una fuente de materia exótica, sino que esta sería cada vez más abundante. Este hecho fue notado por González-Díaz que, a la vista del trabajo de Babichev y col., [14], consideró que los agujeros de gusano no sólo podrían existir en este marco, sino que su dinámica se vería afectada debido a la acreción de energía oscura [13]. Aunque el crecimiento de los agujeros de gusano debido a la acreción de energía fantasma podía ser predecible, ya que resultaría natural que un tipo de objeto creciera al ganar más sustancia del tipo que lo compone, González-Díaz concluyó que este crecimiento parecía ser tan enorme que el agujero de gusano podría llegar a ser más grande que el propio universo en un tiempo finito. Debido a este hecho sorprendente, el mismo autor decidió tratar más cuidadosamente el problema de la acreción en agujeros de gusano, [119], y plantear ciertas cuestiones interesantes sobre sus resultados en un trabajo posterior, [120]. A continuación, repasaremos los resultados principales de González-Díaz planteados en estos trabajos [13; 119; 120].

Para estudiar la acreción de energía oscura en agujeros de gusano, se puede seguir un método similar al planteado por Babichev y col., [14], adaptado a la geometría en cuestión. Así, González-Díaz, [119], consideró un agujero de gusano del tipo planteado por Morris y Thorne con una función corrimiento nula,  $\Phi(r) = 0$ , y a la energía oscura

descrita por un tensor energía-momento que tomase la forma del de un fluido perfecto dada por la expresión (2.1.2). De esta forma, integrando la componente temporal de la ley de conservación del tensor energía momento, se obtiene

$$ur^2m^{-2}(p + \rho) \left(1 - \frac{K(r)}{r} + u^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1} = B_1, \quad (2.2.4)$$

y, a partir de la integración de la proyección en la 4-velocidad de esta ley de conservación, se tiene

$$ur^2m^{-2} \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1/2} e^{\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} = -Q, \quad (2.2.5)$$

donde  $Q > 0$  es una contante cuyo signo es determinado teniendo en cuenta que el flujo es entrante, es decir,  $u < 0$ . Estas dos expresiones, Eqs. (2.2.4) y (2.2.5), se pueden combinar produciendo

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{K(r)}{r} + u^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1/2} e^{-\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} = B_2, \quad (2.2.6)$$

con  $B_2 = -B_1/Q = \rho_\infty + p(\rho_\infty)$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta que el cambio de la masa del agujero de gusano debe ser proporcional a la integral de la densidad de momento, se puede considerar

$$\dot{m} = 4\pi r^2 T_0^r, \quad (2.2.7)$$

donde se ha elegido el signo de forma tal que el cambio se reafiera a energías negativas y se ha utilizado el hecho de que nos encontramos en un caso con simetría esférica. La razón de cambio de la masa del agujero de gusano, Eq. (2.2.7), se puede re-expresar utilizando las Eqs. (2.2.5) y (2.2.6) de la forma siguiente

$$\dot{m} = -4\pi Q m^2 \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{1/2} [\rho_\infty + p(\rho_\infty)]. \quad (2.2.8)$$

En el caso físicamente relevante de un observador asintótico,  $r \rightarrow \infty$ , la Eq.(2.2.8) se reduce a

$$\dot{m} = -4\pi Q m^2 [\rho_\infty + p(\rho_\infty)]. \quad (2.2.9)$$

Por lo tanto, la masa del agujero de gusano, y con ella su tamaño caracterizado por  $r_0(t)$ , crecerá debido a la acreción de energía fantasma y decrecerá si el flujo entrante tiene una ecuación de estado tal que  $w > -1$ .

Se debe destacar que el signo de la Eq. (2.2.9) es precisamente el contrario al de la correspondiente expresión para los agujeros negros, Eq. (2.1.8), debido a que se ha fijado el signo contrario en la Eq. (2.2.7) al considerar energías negativas. Este

hecho se puede entender considerando que el tipo de materia que forma los agujeros de gusano, materia exótica, podría corresponder a una energía negativa, mientras que en los agujeros negros se considera materia ordinaria con energía positiva siendo, por tanto, el tipo de materia de los agujeros de gusano de signo contrario a la de los agujeros negros<sup>10</sup>. González-Díaz, sin embargo, comentó [119] que también existiría la posibilidad de que en ciertos agujeros de gusano este signo fuera el mismo que en caso de los agujeros negros, ya que una sustancia que viola la condición de energía nula, como la que forma los agujeros de gusano, no debe necesariamente implicar una energía negativa medida por un observador estático; recuperándose en estos agujeros de gusano los mismos resultados que los extraídos por Babichev y col. en el caso de los agujeros negros. No obstante, parece difícil que una vez formado un objeto astronómico con propiedades anti-gravitatorias, derivadas de las violaciones de las condiciones de energía de la materia que lo forma, este posea una masa positiva sin imponer condiciones poco naturales.

Aunque la Eq. (2.2.8) fue derivada por primera vez siguiendo este método en la Ref. [119], ésta ya había sido sugerida en la Ref. [13] donde se discutían sus consecuencias. Para ver estas consecuencias, se puede integrar la Eq. (2.2.9) considerando un parámetro de la ecuación de estado del fluido constante y una densidad de energía dada por (2.1.9), obteniéndose

$$m(t) = m_0 \left[ 1 + \frac{4\pi Q(1+w)\rho_{\infty,0}m_0(t-t_0)}{1 + \sqrt{6\pi\rho_{\infty,0}(1+w)(t-t_0)}} \right]^{-1}. \quad (2.2.10)$$

Así, en el caso en el que el fluido acretado tenga un parámetro de la ecuación de estado constante  $w > -1$  la masa del agujero de gusano, y con ella su garganta, decrecerá aunque sin llegar a anularse. El valor mínimo de esta masa, cuando  $t \rightarrow \infty$ , es

$$m_{\min} = \frac{m_0}{1 + \sqrt{\frac{8\pi\rho_{\infty,0}}{3}Qm_0}}. \quad (2.2.11)$$

En el caso en el que se considera que el agujero de gusano está contenido en un universo lleno de energía fantasma, se puede ver que la parte derecha de la ecuación (2.2.10) diverge para  $t = t_*$ , con

$$t_* = t_0 + \frac{t_{\text{br}} - t_0}{1 + \sqrt{\frac{8\pi\rho_{\infty,0}}{3}Qm_0}} < t_{\text{br}}. \quad (2.2.12)$$

---

<sup>10</sup>Por otra parte, la necesidad de este cambio de signo se puede sospechar a la vista de la expresión de la masa de los agujeros de gusano formados por una capa fina de materia exótica (pág. 174 de la Ref. ([100]), que debe ser de signo contrario con respecto a la ordinaria.

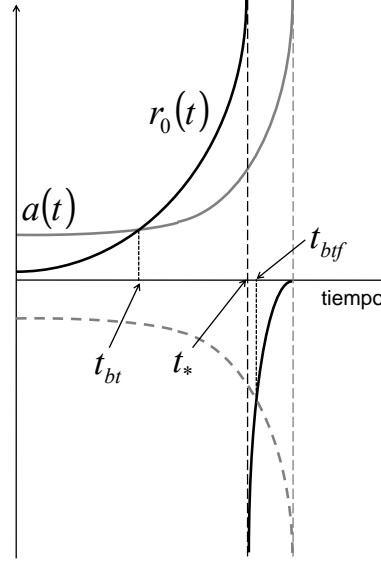


Figura 2.2: Evolución del radio de la garganta del agujero de gusano frente al factor cósmico de escala. En  $t_{bt}$  el universo observable entra dentro del agujero de gusano, cuya masa exótica negativa se convierte en positiva en  $t_*$ . Así, el universo saldrá de un agujero negro en  $t_{btf}$ .

Por lo tanto, en este tipo de modelos, el crecimiento de los agujeros de gusano sería tan extremo que llegaría a divergir antes de que lo hiciera el propio universo en el gran desgarro. En este momento,  $t_*$ , no existiría ninguna singularidad en el modelo fantasma cuyo contenido se describiera mediante la Eq. (2.1.9), con lo que no habría ninguna necesidad de considerar que la evolución de este debe acabar en  $t_*$ . Después de este tiempo, la masa del agujero de gusano cambiaría de signo, con lo que podría ser considerada materia ordinaria, y su valor absoluto decrecería hasta anularse en el gran desgarro (véase la Fig (2.2)).

González-Díaz interpretó este hecho considerando que el agujero de gusano de Morris-Thorne crece hasta alcanzar un tamaño infinito, para luego convertirse en un puente de Einstein-Rosen que se estrangularía inmediatamente produciendo un agujero negro<sup>11</sup> que comenzaría a decrecer mediante el mecanismo de Babichev y col. [14] para desvanecerse en el gran desgarro. De esta forma, existirían dos momentos en los que el tamaño del agujero fuera igual al “tamaño del universo” (caracterizado mediante el factor cósmico de escala  $a(t)$ ),  $t_{bt}$  y  $t_{btf}$ , con  $t_{bt} < t_* < t_{btf}$ , como se muestra en la Fig (2.2). Por lo tanto, el agujero de gusano contenido en el universo crecería a una

<sup>11</sup>González-Díaz literalmente consideró que este puente de Einstein-Rosen se desestabilizaría para formar un par agujero negro-blanco aunque, de forma efectiva, la desestabilización de un puente de este tipo al avanzar el tiempo produce sólo el agujero negro y el agujero blanco se formaría en la otra dirección temporal, de ahí que su discusión final se refiera únicamente al negro.

velocidad mayor que él mismo hasta que en  $t_{bt}$  el universo quedara contenido dentro de él, emprendiendo lo que se llamó un gran viaje (o big trip) en la Ref. [126], a través del agujero; si la evolución temporal no quedara afectada en este punto, el agujero de gusano acabaría produciendo un agujero negro, por el proceso mencionado, quedando contenido el universo en él durante un tiempo hasta que, debido al decrecimiento de éste, el universo saliera del agujero para acabar acercándose a la singularidad del gran desgarró con un agujero negro desvaneciéndose en su interior.

No obstante, como González-Díaz señaló en las Refs. [13; 120], la necesidad de conservar el límite asintótico en el que estos resultados son derivados durante el viaje del universo así como de tener un agujero de gusano asintóticamente plano, nos llevaría a recurrir a un esquema de multiverso, permitiendo insertar al agujero de gusano en otros dos universos con respecto a los cuales el agujero fuera asintóticamente plano y tuviera sentido dicho límite. Esto produciría que el universo viajara a través del tiempo de los otros universos, implicando una evolución causal en el esquema mencionado. Así, al final de este gran viaje, nuestro universo podría no verse condenado a destruirse en la singularidad futura, que podría ser evitada<sup>12</sup>.

Otras consideraciones sobre la estabilidad de los agujeros de gusano ante inestabilidades cuánticas, precisamente cuando estos van a producir un gran viaje, así como la no aparición de restricciones relacionadas con la transferencia de información en este proceso, fueron también tratadas por el mismo autor en la Ref. [120].

Finalmente, se debe reiterar que los resultados presentados son estrictamente válidos en el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$  donde González-Díaz esperaba que las modificaciones provenientes del posible uso de una métrica no estática desaparecieran [119; 120]. Sin embargo, dadas las polémicas implicaciones de estos resultados, este punto deberá ser tratado en mayor detalle, generalizando el método utilizado mediante la utilización de una métrica que pueda describir un flujo de energía interno en el agujero no-nulo,  $\Theta_0^r \neq 0$ .

### 2.2.1. Consideración de la reacción de la geometría.

El tamaño de los agujeros de gusano está caracterizado por  $r_0$ , siendo este radio el mínimo de la función forma  $K(r)$ . Por lo tanto, al igual que sucediera con el método utilizado para el estudio de la acreción en agujeros negros, un cambio en la masa de

---

<sup>12</sup>Aunque este autor consideró cuales podrían ser los finales de este viaje en el marco de multiverso mencionado [13], una mejor comprensión de estos posibles fenómenos fue alcanzada mediante el estudio de distintos tipos de éste llevado a cabo en Ref. [19]. Este tema será, por lo tanto, tratado en más detalle cuando se presente un modelo capaz de producir estos distintos tipos de fenómenos en la subsección 3.1.1 del Capítulo 3.

estos agujeros, y con ella de su tamaño, debe ser propiamente descrito mediante una posible evolución temporal de esta cantidad,  $r_0(t)$ , implicando una función forma que sea también función del tiempo,  $K(r, t)$ . En otras palabras, la métrica (2.2.2), aunque necesariamente implica la presencia de un fluido exótico, no es capaz de describir la retro-reacción de la geometría ante la acreción de un flujo, ya que el tensor energía-momento que produce tiene una componente  $\Theta_0^r = 0$ .

Por esta razón, consideramos la generalización no-estática de la métrica de Morris-Thorne más simple, capaz de describir este flujo como [18]

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - K(r, t)/r} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.2.13)$$

donde se ha fijado la función corrimiento a cero y se ha permitido una dependencia arbitraria de la función forma con el tiempo. Al igual que en los estudios anteriores, considerando que la energía fantasma que llena el espacio tiene un tensor energía-momento de la forma de un fluido perfecto, (2.1.2), integramos radialmente la componente temporal de la ecuación de conservación de este tensor energía-momento, teniendo en cuenta una dependencia temporal y radial arbitraria de la presión, la densidad de energía y la 4-velocidad, para obtener

$$ur^2 m^{-2} (p + \rho) \left(1 - \frac{K(r, t)}{r} + u^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)^{-1} e^{\int_\infty^r dr' \alpha(r', t)} = B_1(t), \quad (2.2.14)$$

donde hemos introducido un factor  $m^{-2}$  para proporcionar a la función  $B_1(t)$  dimensiones de una densidad de energía y

$$\alpha(r, t) = \frac{\partial_0 T_0^0}{T_0^r} + \frac{\partial_0 K(r, t)}{2r \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)} \frac{T_0^0 - T_r^r}{T_0^r}. \quad (2.2.15)$$

A partir de la integral de la proyección en la 4-velocidad de esta ley de conservación, se tiene

$$ur^2 \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)^{-1/2} e^{\int_\infty^r \frac{\partial_0 \rho}{p(\rho) + \rho} dr'} e^{\int_\infty^r dr' \beta(r', t)} = -Q(t), \quad (2.2.16)$$

con  $Q(t)$  una función del tiempo que tiene dimensiones de masa al cuadrado, pudiéndose ver que, por los mismos argumentos aplicados a la función  $A(t)$  de la subsección 2.1.1, es  $Q(t) = Qm^2$ , siendo  $Q > 0$ ; y

$$\beta(r, t) = \frac{\left(1 - \frac{K(r, t)}{r} + u^2\right)^{1/2}}{u \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)^{1/2}} \left[ \frac{\partial_0 \rho}{p + \rho} + \frac{\partial_0 K(r, t)}{2r \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)} \right] + \frac{\partial_0 \left[ \left(1 - \frac{u^2}{1 - \frac{K(r, t)}{r}}\right)^{1/2} \right]}{u}. \quad (2.2.17)$$

Con la combinación de las Eqs. (2.2.14) y (2.2.16) se puede obtener

$$(p + \rho) \left(1 - \frac{K(r, t)}{r} + u^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)^{-1/2} e^{-\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}} \times e^{\int_{\infty}^r dr' [\alpha(r', t) - \beta(r', t)]} = B_2(t), \quad (2.2.18)$$

donde  $B_2(t) = -B_1(t)/Q = \rho_\infty(t) + p[\rho_\infty(t)]$ ; recuperando en el presente estudio, por tanto, una evolución temporal de la densidad de energía del fluido implicada por el propio método de acreción. Teniendo en cuenta las Eqs. (2.2.16) y (2.2.18) en el cambio de la masa del agujero de gusano, dado por la Eq.(2.2.7), se tiene

$$\dot{m} = -4\pi Q m^2 \left(1 - \frac{K(r, t)}{r}\right)^{1/2} [\rho_\infty(t) + p(\rho_\infty(t))] e^{-\int_{\infty}^r dr' \alpha(r', t)}, \quad (2.2.19)$$

que, en el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$ , se reduce a

$$\dot{m} = -4\pi Q m^2 [\rho_\infty(t) + p(\rho_\infty(t))], \quad (2.2.20)$$

que no es más que la Eq. (2.2.9), recuperándose, por tanto, el crecimiento de los agujeros de gusano debido a la acreción de energía fantasma y el decrecimiento si  $w > -1$ . Se debe destacar que en el caso en el que el fluido acretado sea de naturaleza fantasma, ninguna aproximación ha sido realizada hasta el momento ya que al menos ciertas versiones de éste son capaces de generar la geometría dada por (2.2.13), que además describe el flujo acretado. De esta forma estamos teniendo en cuenta, al menos en principio, la retro-reacción de la geometría a la presencia del fluido y también al flujo que genera.

Al igual que en la subsección 2.1.1, la variación temporal de la masa puede ser integrada si suponemos que la evolución de la densidad de energía y presión del fluido en el límite asintótico, y por lo tanto a un valor fijo del radio, tienen la misma forma que las de un fluido cosmológico, es decir, que un fluido oscuro capaz de describir la expansión acelerada de un universo homogéneo e isótropo. En este caso, se puede obtener [16]

$$m(t) = \frac{m_0}{1 - Q m_0 [H(t) - H_0]}, \quad (2.2.21)$$

que divergería si el parámetro Hubble alcanzase un valor  $H_* = H_0 + 1/(Q m_0) < \infty$  en un cierto momento futuro  $t_*$ .

Si consideramos que nos encontramos en un universo dominado por energía fantasma que contiene un agujero de gusano con una masa cuya evolución temporal viene dada por (2.2.21), el parámetro de Hubble  $H(t)$  es una función creciente del tiempo. Por lo tanto, en el caso en el que en este universo se vaya a alcanzar un valor del parámetro de Hubble infinitamente grande, se tiene  $H_0 < H_* < H_{\text{sing}} = \infty$  y, ya que  $H(t)$  es



una función creciente y continua en el intervalo  $[t_0, t_{\text{sing}})$ , esto implica  $t_0 < t_* < t_{\text{sing}}$ , alcanzando los agujeros de gusano un tamaño infinitamente grande.

Así, en todos los modelos con un final cósmico caracterizado por una divergencia de  $H(t)$ , el agujero de gusano sería infinitamente grande antes de que el universo lo fuera, si lo llegara a ser; implicando que el universo se embarca en un gran viaje. Un caso particular de este comportamiento es el gran desgarró presente en algunos modelos como los considerados por González-Díaz aunque, como veremos en el próximo capítulo, este no es el único escenario posible en el que un gran viaje tendría lugar.

Se debe destacar que, aunque hemos argumentado el acontecimiento de este fenómeno en los modelos mencionados, no hemos excluido su posible aparición en modelos fantasmas en los que el parámetro de Hubble mantenga un valor finito durante la evolución del universo. Si consideráramos modelos fantasmas en los que este parámetro tendiera a un valor máximo finito,  $H_{\text{max}}$ , un gran viaje tendría lugar si  $H_* < H_{\text{max}}$ ; mientras que si  $H_* > H_{\text{max}}$  los agujeros de gusano mantendrían un tamaño finito. En este último caso habría dos posibilidades<sup>13</sup>: (i) aunque estos agujeros mantienen un tamaño finito, éste podría llegar a ser mayor que el de nuestro universo observable produciendo un gran viaje, y, (ii) que estos agujeros no lleguen a tener el tamaño del universo sino que tiendan a un tamaño definitivamente macroscópico menor que éste. Mientras que (i) debería ser estudiada más cuidadosamente en cada modelo particular, (ii) implicaría que el agujero de gusano estaría sujeto a la conjetura del censor cósmico, [102], acumulándose catastróficamente en su horizonte cronológico las partículas polarizadas del vacío ya que, se debe recordar que el caso estudiado por González-Díaz en el que los agujeros de gusano podrían violar dicha conjetura, se refiere a agujeros de gusano en, o cerca de, un gran viaje, Ref. [120].

Por otro lado, en el caso en el que  $w > -1$  el parámetro de Hubble es una función decreciente, con lo que la masa de los agujeros de gusano decrece tendiendo a un valor mínimo

$$m_{\text{min}} = \frac{m_0}{1 + Qm_0(H_0 - H_{\text{min}})}, \quad (2.2.22)$$

donde  $H_{\text{min}}$  es el límite de  $H(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta expresión se reduce a (2.2.11) en el caso particular en el que  $H_{\text{min}} = 0$ . No obstante, un comportamiento similar al mencionado arriba en el caso en el que los agujeros de gusano mantienen un tamaño finito, produciría que estos agujeros fueran nuevamente inestables.

Finalmente, queremos recalcar las diferencias de este estudio con el anteriormente presentado en el caso de los agujeros negros. Aunque en principio el método utilizado es el mismo en ambos casos las aproximaciones que conlleva son muy diferentes. La

---

<sup>13</sup>Estas dos posibilidades fueron consideradas en [127] en un modelo cosmológico particular.

métrica generalizada en el caso de los agujeros negros (2.1.13) sigue describiendo una situación de vacío y, por lo tanto, dicho método sigue haciendo uso de un fluido de prueba aunque tenga en cuenta un posible flujo. Por el contrario, en el caso de los agujeros de gusano la métrica debe describir necesariamente la presencia de un fluido que viole la condición de energía nula y, teniendo además en cuenta la generalización utilizada, Eq. (2.2.13), de un flujo de energía no-nulo en el agujero describiendo así, al menos en principio, la retro-reacción del espaciotiempo; en este caso, es a la hora de integrar la Eq. (2.2.20) cuando se supone una evolución particular, consistente con nuestro Universo.

Por otro lado, en el caso de los agujeros negros la masa,  $M(t)$ , es una cantidad que ya aparece en la métrica (2.1.13), por lo que podemos considerar que cualquier dependencia radial de ésta se debería a una inconsistencia de las aproximaciones mencionadas. Mientras que en el caso de los agujeros de gusano la definición de su masa es algo más compleja y dependerá del modelo utilizado<sup>14</sup>.

## 2.3. Debate, consistencia de los resultados y nuevas líneas.

En este capítulo hemos presentado algunos métodos que tratan los fenómenos de acreción de energía oscura y fantasma en agujeros negros y de gusano basados en el de Babichev y col. [14]. Nuestra intención en esta presentación no es asegurar que el estudio de estos procesos es un tema cerrado, por el contrario este permanece abierto hasta ahora y ha originado cierta controversia en los últimos años.

Por este motivo, y para señalar los posibles problemas de los métodos mencionados así como de sugerir las posibles mejoras que podrían serle aplicadas, en esta sección incluiremos en orden cronológico algunos comentarios relevantes que han surgido apoyando, mejorando o criticando el método de Babichev y col. [14] así como su aplicación a los agujeros de gusano [13]. De esta forma, alternaremos trabajos relativos al proceso de acreción en agujeros negros con otros que tratan el proceso en los agujeros de gusano ya que, como se ha visto a lo largo de este capítulo, el procedimiento es similar en ambos casos. Sin embargo, como hemos señalado, el caso de los agujeros de gusano no contiene ciertos problemas que afectan al de los agujeros negros, ya que en el primero

---

<sup>14</sup>En particular, la comparación de las ecuaciones de Einstein producidas por la métrica (2.2.13) con la expresión utilizada para describir la variación de la masa, Eq. (2.2.7), implicaría  $\dot{m} \sim -\dot{K}(r, t)$ , y no sería por tanto sorprendente que la masa física fuera definida en un cierto límite que parecería ser precisamente el asintótico, en el que se deba recuperar que  $m(t) \sim \text{Lim } m(r, t)$  sea una función creciente de  $r_0(t)$ .

no se considera una métrica de vacío. Por otro lado, queremos señalar que el estudio de los efectos de los agujeros negros mediante el uso de un fluido de prueba no es algo nuevo y ha sido de gran interés en los primeros estudios de su evolución así como en el proceso de radiación térmica presente en estos objetos [121; 128].

Como ya se ha mencionado, el primer estudio del proceso de energía oscura en agujeros negros fue el realizado por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [14], mediante la consideración de la acreción en el caso esféricamente simétrico, ajustando la solución analítica del problema de acreción relativista en un agujero negro de Schwarzschild desarrollada por Michel [121]. Así estos autores, obtuvieron la expresión de la variación temporal de la masa del agujero negro debida a este proceso, Eq. (2.1.8), mostrando que dicha masa podía decrecer en el caso en el que el fluido acretado fuera de naturaleza fantasma, llegando incluso a desaparecer en el gran desgarro. Estos autores señalaron que este comportamiento estaría permitido por el teorema del área de Hawking, [86], al encontrarse el caso fantasma fuera de los supuestos utilizados en la demostración de dicho teorema.

Poco después, González-Díaz [13] consideró la acreción de energía fantasma en agujeros de gusano del tipo Morris-Thorne. Suponiendo que, ya que la masa de estos agujeros de gusano en el caso en el que la materia exótica está concentrada en una capa fina,  $\mu = -\pi r_0/2$ , es aproximadamente la necesaria para producir un agujero de gusano de Schwarzschild con el signo cambiado, la variación temporal del radio de la garganta del agujero de gusano,  $\dot{r}_0(t)$ , debe ser similar a la expresión obtenida por Babichev y col. para la variación de la masa de los agujeros negros pero con un signo menos. Así, este autor consideró una expresión similar a la posteriormente obtenida Eq. (2.2.9), con otras constantes, donde, de forma equivalente, en lugar de aparecer la masa del agujero  $m$  y su variación  $\dot{m}$  se relacionaba el radio de la garganta  $r_0$  con su derivada  $\dot{r}_0$  y, al menos en principio, no se restringía su validez para un observador particular. Este estudio no sólo implicaba el crecimiento de los agujeros de gusano debido a la acreción de energía fantasma, sino que, en determinados modelos con un gran desgarro futuro, estos agujeros llegarían a ser mayores que el propio universo antes de que éste alcanzara la singularidad, emprendiendo el universo un gran viaje por su interior.

Más tarde, González-Díaz y Sigüenza, [29], obtuvieron que la desaparición de los agujeros negros debida a la acreción de energía fantasma también se recuperaba en modelos más complicados y Babichev, Dokuchaev y Eroshenko corroboraron sus resultados previos en un trabajo más detallado, Ref. [12], donde también incluyeron un estudio en profundidad de dos modelos que admiten solución analítica. Por otra parte, otros trabajos que incluían implicaciones relevantes a este respecto también fueron publicados en este periodo, como el relativo a la influencia del proceso de acreción en la

termodinámica de los agujeros negros y la posible formulación de una termodinámica fantasma, Ref. [29], y la consideración de que los fenómenos cuánticos que suavizarían el gran desgarro influirían también en los resultados de este proceso, no permitiendo un desvanecimiento total de los agujeros negros, Ref. [62].

Pero, de ninguna manera los trabajos mencionados representaban la última palabra sobre este tema. En 2005 Faraoni e Israel, Ref. [129], consideraron la evolución temporal de un agujero de gusano en un modelo de Friedmann sin encontrar un fenómeno de gran viaje. En este trabajo, los autores comentaron que el modo en el que González-Díaz había aplicado el método de Babichev y col. al caso de los agujeros de gusano, [13], podría no ser adecuado, ya que la expresión  $\mu = -\pi r_0/2$  no debería ser válida necesariamente para el caso de un agujero de gusano dinámico en un universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) y, por lo tanto, la variación temporal de la masa del agujero de gusano no tendría porqué ser análoga a la del agujero negro con signo contrario.

Poco después, González-Díaz [119] siguió un procedimiento similar al de Babichev y col. [14], utilizando la métrica de Morris-Thorne, obteniendo la Eq. (2.2.9), válida para un observador asintótico. Este autor también aclaró que los resultados obtenidos por Faraoni e Israel en la Ref. [129] sobre la ausencia de un gran viaje eran debidos a que solamente habían tenido en cuenta los efectos inflacionarios en el tamaño del agujero de gusano producidos por la expansión acelerada del universo, que él mismo había considerado años antes en otro trabajo [108], y no se habían incluido los efectos superpuestos debidos al proceso de acreción, cuya existencia se evidencia en este trabajo [119].

Por otra parte, también González-Díaz consideró ciertos problemas potenciales relacionados con el gran viaje del universo a través del agujero de gusano [120], algunos de los cuales ya han sido expuestos en el presente capítulo. En primer lugar, mostró como las correcciones debidas a la utilización de una métrica del tipo Morris-Thorne que permitiera una evolución temporal de la función de forma, deberían desaparecer de las ecuaciones de movimiento consideradas en el estudio de la acreción en el límite asintótico en el que se obtiene el gran viaje; incluso considero una métrica particular que en principio podría describir un agujero de gusano contenido en un modelo de Friedmann, argumentando que debería implicar dicho gran viaje. En segundo lugar, comentó como la re-inserción del agujero en otros universos, en un escenario de multiverso, podría permitir la consideración del límite asintótico. Este autor también explicó que en un modelo fantasma el agujero de gusano crecería a una velocidad mayor que la de la luz, lo que produciría que las partículas del vacío que se creasen en el horizonte cronológico no llegarían a alcanzar al mismo, introduciendo calculos explícitos sobre esta estabili-

dad. Por tanto, aunque se consideraba que los efectos cuánticos podrían afectar al gran desgarró [62], estos efectos no influenciarían al gran viaje que tendría lugar antes que esta singularidad. Finalmente, esclareció como un proceso de este tipo no contradiría el límite holográfico.

Siguiendo esta línea de pensamiento, en Ref. [15] aplicamos el método de Babichev y col. a la generalización dinámica más simple de la métrica de Schwarzschild, para estudiar la acreción de energía oscura en agujeros negros de una forma más consistente. Aunque en este trabajo se utiliza todavía una aproximación de fluido de prueba, con lo que la aplicabilidad a tasas de acreción arbitrarias podría ser debatible, la métrica no-estática podría tener en cuenta al menos la reacción en la masa del agujero negro. Como había sido sugerido por González-Díaz previamente en el caso de los agujeros de gusano [120], los resultados obtenidos a partir de esta generalización se reducen a los del caso estático en el límite asintótico.

Más tarde, Faraoni mostró una aptitud escéptica,[130], ante el fenómeno del gran viaje, basada en ciertas reservas sobre los trabajos de González-Díaz en particular, [13; 119; 120], y el método de Babichev y col. en general, [14]. Su objeción principal en lo relativo a los trabajos de González-Díaz fue que el uso de una métrica estática no puede producir un flujo de energía radial en el agujero, es decir, las métricas estáticas siempre implican  $\Theta_0^r = 0$ . Más aún, Faraoni consideró que la solución de González-Díaz, y la correspondiente de Babichev y col. para el caso del agujero negro, no podían satisfacer las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de conservación utilizadas en estos métodos sólo podían corresponder estrictamente a soluciones de vacío. Por otra parte, Faraoni también mostró como si la energía fantasma es modelada por un fluido perfecto, como se consideraba en los trabajos mencionados, la velocidad radial propia del fluido sería  $v \sim a^{3(1+w)/2}$ , que tiende a cero en el gran desgarró frenando, por lo tanto, el proceso de acreción.

Poco después, consideramos la aplicación del método de acreción a una métrica generalizada de Morris-Thorne introduciendo en la función forma una dependencia temporal arbitraria, [18]. Como se ha visto en este capítulo, en este caso se recuperan los resultados previos del cambio temporal de la masa de los agujeros de gusano en el límite asintótico. Se debe repetir que en la obtención de esta expresión, (2.2.20), se permite una dependencia temporal y radial arbitraria de la densidad de energía, la presión y la 4-velocidad del fluido, por lo que dicha expresión debe ser válida en general para agujeros negros asintóticamente planos. Por otro lado, se debe reiterar que los agujeros de gusano atravesables no pueden ser soluciones de vacío en ningún caso, como es bien conocido desde su formulación [101], y que una dependencia temporal en la función forma produce un  $\Theta_0^r \neq 0$ , teniendo en cuenta el flujo de energía en

el agujero. Por otro lado, podría parecer que el comentario de Faraoni [130] sobre el rápido decrecimiento de la velocidad radial propia en las cercanías del gran desgarro conllevaría la inevitabilidad del gran viaje, ya que es precisamente al integrar el cambio de la masa del agujero de gusano donde se incluye cierta aproximación. No obstante, se debe notar que el gran viaje tendría lugar no sólo antes que el gran desgarro, sino previamente a la divergencia del agujero de gusano, y que es el flujo radial propio el que sería crucial en este proceso, aproximadamente  $\rho v \sim a^{-3(1+w)/2}$ , que es una función creciente en modelos fantasmas llegando a divergir en el big rip, lo que garantiza que el proceso de acreción no se frenaría. Más aún, debe ser subrayado que la acreción de energía oscura en objetos astronómicos se diferencia de la acreción usual de materia concentrada en una región dada del espacio, ya que en el primer caso la energía oscura cubre todo el espacio no estando por lo tanto el fenómeno sólo basado en el movimiento del fluido, sino en el crecimiento del espacio lleno de esta sustancia dentro de los límites del objeto considerado.

Más tarde Gao, Chen, Faraoni y Shen en la Ref. [131], recordando que el método de Babichev y col. aplicado a agujeros negros no tiene en cuenta la retro-reacción de la geometría a la presencia del fluido, recalcaron que los resultados obtenidos por este método son válidos sólo cuando la densidad de energía es baja. Con este espíritu, estos autores consideraron una generalización de la métrica de McVittie y un tensor energía-momento para describir la energía oscura en el que insertaron un término de flujo radial de calor, para concluir que un agujero negro cosmológico, es decir, en un espacio que no es asintóticamente plano, debe crecer debido a la acreción de energía fantasma. Estos autores también señalaron que existían ciertas dificultades para comparar su solución con la correspondiente de Babichev y col. [14], suponiendo que este hecho pudiera ser debido a las simplificaciones realizadas en ambos casos.

El trabajo de Gao y col. [131] originó algunos comentarios interesantes. En la Ref. [17], donde realizamos un primer intento de consideración de los efectos cosmológicos en el fenómeno de acreción de agujeros negros que, como se ha presentado en este capítulo, considera una generalización del espaciotiempo de Schwarzschild-de Sitter, comentamos como los resultados obtenidos en la Ref. [131] son alcanzados usando premisas que, además de ser contradictorias con los resultados obtenidos por todos los estudios realizados hasta la fecha sobre la acreción en agujeros negros, contienen ya de partida el resultado deseado, haciendo por lo tanto circular todo el argumento e invalidando los resultados. Es más, los resultados obtenidos en los estudios de este fenómeno deben ser válidos, al menos, a tasas de acreción bajas; por los que una solución que no recupera dichos resultados en este régimen no estaría describiendo el mismo proceso. Por otro lado, en la Ref. [132], Babichev, Chernov, Dokuchaev y Eroshenko se refirieron al trabajo de Gao y col. [131] indicando sus dudas sobre las conclusiones allí obteni-

das. Babichev y col. señalan que la introducción del término del flujo radial de calor es muy poco natural y se hace para poder considerar la configuración particular que tienen en cuenta Gao y col., que no es capaz de acretar un fluido perfecto. Entre otros posibles problemas del estudio realizado en [131], los autores también comentan que la temperatura del fluido divergería en el horizonte de la configuración utilizada.

En resumen, en lo relativo a la acreción de energía oscura en agujeros negros, el método de Babichev y col., [14], ha sido generalizado para tener en cuenta la reacción del tamaño del agujero negro en un espaciotiempo asintóticamente plano, [15], y en uno cosmológico, [17]. Sin embargo, el estudio todavía carece de una consideración de la retro-reacción completa que produciría el fluido oscuro en un espaciotiempo con un comportamiento asintótico apropiado, es decir, que pudiera describir la presencia de este fluido.

Aunque el método utilizado en el estudio de la acreción de energía oscura por agujeros de gusano es similar al empleado para estudiar el fenómeno arriba mencionado, en el caso en el que se acreta energía fantasma la retro-reacción de la geometría a la presencia y flujo del fluido se tienen en cuenta, automáticamente, al considerar una generalización dinámica de la métrica de Morris-Thorne [18]. En este caso no hay estudios, al menos en nuestro conocimiento, que consideren rigurosamente este fenómeno en un espaciotiempo cosmológico. Sin embargo, dados los resultados obtenidos en lo referente a la consideración de la acreción en agujeros negros cosmológicos [17] y teniendo en cuenta el crecimiento inflacionario que sufrirían los agujeros de gusano debido al crecimiento del universo [108], que esperamos se superponga a los efectos debidos a la acreción, no nos parece probable que un estudio de estas características implicara un crecimiento moderado de los agujeros de gusano, con lo que esperamos que el gran viaje sobreviva en un escenario cosmológico consistente, pudiendo incluso disminuir el intervalo de tiempo necesario para que éste se alcance.

Queremos señalar que los resultados sobre el crecimiento o decrecimiento de los objetos astronómicos en los casos correspondientes, mencionados a lo largo de este capítulo, parecen estar considerablemente probados y la solidez de dichos resultados puede entenderse mediante la utilización de un método independiente. El formalismo desarrollado por Hayward para estudiar espaciotiempos dinámicos y esféricamente simétricos (que se tratará en el Capítulo 4 de la presente tesis) [28], implica que los agujeros negros dinámicos, caracterizados mediante horizontes atrapantes exteriores futuros, crecerán si se consideran en un entorno tal que  $p + \rho > 0$ , decreciendo si  $p + \rho < 0$ , fenómeno que debe ser originado por la presencia de un flujo del material de los alrededores en el agujero. Por lo tanto, este estudio totalmente independiente confirma los resultados presentados en este capítulo sobre la evolución de los agujeros

negros, al menos cualitativamente. La cuestión que quedaría abierta es como de grandes podrían ser las diferencias cuantitativas que aparecerían al considerar la retro-reacción de un espacio cosmológico debida a la energía oscura.

Por otra parte, la aplicación del formalismo de Hayward al caso de los agujeros de gusano asintóticamente planos recobrará los resultados obtenidos mediante el estudio de la acreción que tienen en cuenta la retro-reacción de la geometría [18], confirmando las ideas básicas de la física de los agujeros de gusano, al estar éstos caracterizados por medio de horizontes atrapantes exteriores pasados, [26]. Ya que no parece que hubiera ninguna razón para cambiar la caracterización local de un objeto astronómico por la consideración de éste en un espacio con un comportamiento asintótico diferente, el crecimiento (decrecimiento) cualitativo de los agujeros de gusano debido a la acreción de energía fantasma (no fantasma) debería ser recuperado al considerar a estos agujeros en un espaciotiempo cosmológico. Sin embargo, y aunque ya hemos comentado nuestra opinión a este respecto, si el crecimiento de estos objetos es tan rápido como para llegar a englobar a todo el universo, es una cuestión abierta que debería ser tratada cuidadosamente.

Finalmente, queremos destacar que el proceso de acreción de energía oscura por agujeros negros podría proponer nuevas pruebas observacionales que ayuden a conocer la naturaleza de la energía oscura, ya que la variación temporal de la masa de estos agujeros debe ser directamente proporcional a  $1 + w$ . Aunque este cambio de la masa parece muy difícil de observar en la práctica, estudios recientes de Mersini-Houghton y Kelleher, [133; 134], han indicado que dicho cambio podría ser medido de forma indirecta si se considera la evolución de agujeros negros supermasivos binarios. En este caso, el cambio en la masa de los agujeros negros debido al proceso de acreción de energía oscura acabaría produciendo un cambio en el radio orbital del sistema binario que podría caer dentro del rango de las observaciones. Este efecto produciría que los agujeros negros confluyeran más rápidamente si  $1 + w > 0$ , mientras que si  $1 + w < 0$  el sistema podría acabar separándose. Mersini-Houghton y Kelleher también señalan [133; 134] dos posibles candidatos para la observación de este fenómeno: la Galaxy 0402+379 y la Radio Galaxy OJ287.

## 2.4. Conclusiones y comentarios finales.

En este capítulo se ha mostrado que si la expansión acelerada actual del Universo es tratada dentro del marco de la relatividad general, la consideración de una energía oscura dinámica produciría importantes efectos aparte de la modelización de dicha aceleración. En este sentido, la energía oscura no sería simplemente similar a un éter,



ya que las huellas de este fluido podrían aparecer en nuestro Universo si observáramos la evolución de los agujeros negros y de gusano, estando la existencia de los segundos intimamente ligada a la existencia de la energía fantasma. Si estos efectos no fueran observables en la práctica, podría ser debido a que los datos astronómicos no son lo suficientemente precisos.

Los agujeros negros deben crecer debido a la acreción de energía oscura con  $w > -1$  y decrecer si dicha energía viola la condición de energía nula, manteniéndose constante en el caso que esta energía no presentara evolución dinámica. Si bien esta afirmación parece estar fuera de toda duda, ya que es apoyada por los estudios de acreción y por métodos independientes [28], el tamaño que podrían llegar a alcanzar los agujeros negros es una cuestión que necesita un tratamiento detallado. Sin embargo, el hecho de que el posible desvanecimiento clásico de estos objetos en la singularidad futura, en el caso en el que el modelo fantasma en cuestión la muestre, sea un resultado que aparece en distintos estudios [14; 15; 17], hace sospechar que este fenómeno podría ser una consecuencia necesaria del tratamiento clásico y, si este desvanecimiento no llegara a producirse, sería en todo caso debido a la incidencia de fenómenos cuánticos, [62], no considerados en nuestro estudio. Por otro lado, el resultado relativo al crecimiento excesivo de los agujeros negros depende del método utilizado. Mientras que la consideración de una métrica asintóticamente plana, estática [14] o no [15], implicaría que un agujero negro capaz de engullir al universo al hacerse infinitamente grande en un tiempo finito debería tener aproximadamente una masa actual análoga a la del universo observable [15], lo que imposibilitaría este proceso<sup>15</sup>; hemos argüido que en una primera aproximación, que tendría en cuenta los efectos cosmológicos, se podría acelerar este engullimiento, haciendo que incluso el fenómeno mencionado fuera posible, al menos en principio [17].

En lo relativo al estudio de la acreción de energía oscura por agujeros de gusano, aunque el procedimiento utilizado es similar al del estudio de este fenómeno en agujeros negros, el método conlleva diferencias relevantes ya que, al menos en el caso en el que se considere un fluido fantasma, no se trabaja en una aproximación del tipo fluido de prueba desde el inicio [18]. De hecho, la generalización dinámica de la métrica Morris-Thorne utilizada en el estudio, no sólo tiene en cuenta necesariamente la presencia de un fluido exótico en sus alrededores, como ya hiciera su progenitora estática, sino que describe un flujo de energía interna en el agujero; por lo tanto, podemos afirmar que

---

<sup>15</sup>En nuestro Universo observable existen agujeros negros que se separan unos de otros debido a la expansión, con lo que nunca llegarán a confluir. De esta forma, la entropía del Universo observable,  $S$ , es menor que la entropía máxima,  $S_{bh}$ ; como  $S_{bh}$  es la entropía que tendría un agujero negro del mismo tamaño que el Universo observable, podemos afirmar que no nos encontramos ya dentro de un agujero negro, puesto que  $S < S_{bh}$ .

un observador alejado del agujero de gusano verá como éste crece si acreta energía fantasma. Por otra parte, el resultado relativo al decrecimiento de estos objetos debido a la acreción de energía con  $w > -1$  está apoyado por este estudio, planteado en este caso como una aproximación de fluido de prueba, así como por la misma física de los agujeros de gusano.

Si consideramos que nuestro Universo está descrito por un modelo fantasma que presenta una singularidad futura caracterizada por una divergencia del parámetro de Hubble, y que el comportamiento de los agujeros de gusano en este escenario puede ser descrito de forma similar al de los agujeros asintóticamente planos, dicha singularidad futura será evitada ya que el universo quedaría englobado en un agujero de gusano emprendiendo un gran viaje. La segunda de estas suposiciones estaría apoyada por el estudio mencionado, relativo a los agujeros negros, el cual indica que los objetos astronómicos en todo caso aumentarían su velocidad de crecimiento cuando se consideran en su entorno natural,  $w > -1$  para agujeros negros y  $w < -1$  para agujeros de gusano. Un segundo argumento a su favor sería el hecho de que el crecimiento de los agujeros de gusano en este tipo de modelos debería superponerse al crecimiento de estos objetos debido a la propia expansión del universo [108].

Se debe señalar que en el caso en el que los agujeros de gusano no crecieran de una forma lo suficientemente acelerada como para llegar a producir un gran viaje del universo, tales agujeros estarían sujetos a la conjetura del censor cósmico [102], que se violaría si este fenómeno tuviera lugar [120]. Por lo tanto, aunque según nuestras consideraciones clásicas los agujeros de gusano decrecerían hasta llegar a tener un tamaño mínimo no nulo en modelos con  $w > -1$  y en ciertos modelos fantasmas podría ocurrir que estos tendieran a un tamaño máximo finito menor que el del universo, la consideración de ciertos efectos cuánticos desestabilizaría dichos agujeros<sup>16</sup>.

Tal vez pueda parecer más natural la consideración de un gran viaje en modelos que consideren un espacio de más dimensiones en el que el universo estaría descrito mediante una brana contenida en éste, permitiendo así que dicho viaje se realizara a través de las dimensiones extra. Si este fuera el caso es preciso notar que nuestras conclusiones acerca de un posible gran viaje se derivan a la vista de la Eq. (2.2.21), que es válida en cualquier universo homogéneo e isótropo 4-dimensional. En un modelo de branas la primera ecuación de Friedmann en la brana es  $H^2 = 8\pi/3 F(\rho) = 8\pi/3 \rho_{\text{eff}}$ , donde  $\rho_{\text{eff}}$  es lo que se llama la densidad de energía efectiva que originaría la dinámica si no nos encontráramos en un modelo de este tipo, siendo la ecuación de conservación

---

<sup>16</sup>En el segundo caso,  $w < -1$ , con un tamaño máximo finito y menor que el universo para el agujero de gusano, aunque éste pudiera crecer inicialmente de forma tal que violara dicha condición, su crecimiento acabaría siendo aproximadamente constante. El primer ejemplo de un comportamiento de este tipo fue encontrado en la Ref. [127].

para  $\rho$  y  $p$  la usual al considerar que el fluido se conserva en la brana. Se puede ver que [16] si consideramos como una aproximación que el agujero de gusano acreta un fluido con las características efectivas que pueden ser definidas en este escenario, entonces se recuperará la Eq.(2.2.21), pudiendo extraerse las conclusiones ya mencionadas. Sin embargo, y aunque un tratamiento de este tipo produciría una solución simple que además coincidiría con el caso 4-dimensional, se debe tener en cuenta que ésta es una aproximación ya que los objetos astronómicos acretarían cantidades físicas y no efectivas. De hecho, al menos en ciertos modelos, dicho tratamiento distaría mucho de ser una buena aproximación, ya que un estudio apropiado en el que se considerara la acreción del fluido físico podría producir resultados opuestos [16]. Por lo tanto, un estudio detallado teniendo en cuenta las cantidades físicas será necesario en cada caso si se consideran modelos de más dimensiones.

En los próximos capítulos, cuando consideremos la acreción de energía oscura por agujeros negros y de gusano utilizaremos los resultados obtenidos a partir de la generalización dinámica del método, subsección 2.1.1 y 2.2.1, respectivamente, teniendo en cuenta que un escenario cosmológico podría inducir un aumento del crecimiento de estos objetos, con lo que las divergencias obtenidas en estos métodos se deberían recuperar en dicho escenario, aunque tal vez confinadas en un intervalo de tiempo ligeramente diferente. Sin embargo, consideramos que, después de todo, este procedimiento es el que puede ser aplicado a más situaciones, teniendo por tanto un rango de validez mayor; es más, el tratamiento de la subsección 2.1.2 no tendría porque producir resultados más coherentes con nuestro universo que el realizado en la subsección 2.1.1, al depender fuertemente los resultados en 2.1.2 de la geometría utilizada.



## Capítulo 3

# Nuevos fenómenos cosmológicos.

Actualmente, la investigación en cosmología es fascinante y se desarrolla rápidamente. Un fenómeno sin una explicación definitiva, la expansión acelerada del Universo, abre la puerta a la aparición de posibles nuevos efectos que, al ser inesperados, pueden ser contrarios a las concepciones previas. En este escenario, la posibilidad de que el parámetro de la ecuación de estado pudiera tomar un valor  $w < -1$  pasó inicialmente desapercibida, a excepción de un estudio de Starobinsky sobre los posibles finales cósmicos [5]. Fue Caldwell quien consideró esta posibilidad más seriamente, bautizándola como energía fantasma, [4], denominando la singularidad que su dominio parecía implicar, el gran desgarro, [6]. Como ya se ha mencionado, hoy en día la energía fantasma no está ni mucho menos descartada por las observaciones, pudiendo estar incluso favorecida dependiendo de las combinaciones de datos que se consideren [50].

En este espíritu podríamos pensar que los convencionalismos vigentes tal vez estuvieran obstaculizando el avance en la comprensión de nuestro Universo, reflexionando incluso sobre que la visión adecuada no es tanto considerar si una teoría o interpretación particular es demasiado inusual o descabellada, sino, como se cree que Bohr le dijo a Pauli en una ocasión [135], si dicha teoría o interpretación es suficientemente inusual o descabellada. Por lo tanto, encontramos totalmente necesario estudiar los nuevos fenómenos cosmológicos que podrían surgir en un escenario de expansión acelerada del universo, ya que este estudio no sólo podría conllevar avances en la comprensión de la teoría utilizada, sino que el no considerarlo podría llevarnos a ignorar la raíz de los problemas y de su posible solución. Así, en el presente capítulo, se tratarán algunos de estos nuevos fenómenos que, aunque aparentemente son de naturaleza distinta, comparten un denominador común: la expansión acelerada del Universo.

En primer lugar, trataremos comprender las características asociadas a un fenómeno

presentado en el capítulo anterior, el gran viaje del universo a través de un agujero de gusano [13]. Para ello consideraremos un modelo proveniente de los modelos de Randall-Sundrum tipo I, [19], que evidenciará como la brana tiene un efecto de duplicación de las singularidades cósmicas, subsección 3.1.1, aunque no necesariamente del crecimiento abrupto de los objetos astronómicos 3.1.2. Los diferentes tipos de fenómenos cosmológicos ligados a los objetos astronómicos presentes en dicho modelo, nos permitirán considerar diferentes tipos de grandes viajes desde una concepción más general a la utilizada hasta ahora y, gracias a su clasificación, comprenderemos mejor las propiedades que los caracterizan (subsección 3.1.3). Por otro lado, el estudio de estos modelos nos conducirá a hechos inesperados, como la posibilidad de definir un nuevo tipo de energía oscura en modelos de branas, que llamaremos energía oscura dual, y la necesidad de discretización del parámetro de la ecuación de estado, como ya sucediera en la Ref. [136].

Ya hemos mencionado que la energía fantasma no conlleva necesariamente la aparición de un final cósmico desgarrado. En particular, un comportamiento asintótico regular se presenta en el caso en el que la energía fantasma tenga una ecuación de estado del tipo gas de Chaplygin generalizado [7], por lo que cabría preguntarse si un fluido de este tipo nos mantendría siempre a salvo de un futuro catastrófico (subsección 3.2). Sin embargo, como veremos en la subsección 3.2.1 este no es el caso, ya que ciertos tipos de gas de Chaplygin generalizado fantasma (PGCG) podrían guiar la evolución del universo hacia un nuevo final cósmico, que por sus características hemos llamado la gran congelación [21]. Por otro lado, ya que la consideración de un dual en un contexto de branas ha implicado la duplicación de las singularidades en el caso más simple estudiado en la sección precedente [19], evaluaremos los efectos de un universo dominado por el dual del gas de Chaplygin generalizado fantasma (DPGCG); en este caso, como veremos, los modelos presentarán un comportamiento asintótico similar al de los PGCG [21; 22], no pudiéndose descartar una fase de contracción previa de la brana que hiciera simétrica la evolución de este universo duplicando, en su caso, los grandes desgarros. Así mismo, comentaremos otras características de estos modelos (subsección 3.2.3) y las implicaciones del proceso de acreción en estos, (subsección 3.2.4).

Por otra parte, ya que la energía oscura produce efectos a escalas cosmológicas, además de la propia aceleración del universo, se podría pensar que tal vez esta sustancia podría ayudar a comprender ciertos problemas de la física teórica actual. Mostraremos que esta posibilidad no debe ser tomada a la ligera presentando un modelo particular de energía oscura que puede ser interpretado como un multiverso proveniente de un ámbito clásico, al considerar una discretización del parámetro de la ecuación de estado, [23] (subsección 3.3.1). La consideración de uno de estos universos como uno temporalmente infinito que nos permita, al menos en principio, describir la cosmología actual [24]

(subsección 3.3.2), podría proporcionarnos un escenario en el que estos problemas no estuvieran presentes (subsección 3.3.3). Así, la consideración de la energía oscura sin restricciones preconcebidas podría conducirnos a gratas sorpresas, incluso en modelos tan simples como el considerado.

Todos estos estudios nos llevarán a una evaluación de sus consecuencias así como a una reflexión sobre las implicaciones que podría sugerir la visión conjunta de las mismas (sección 3.4).

### 3.1. Sobre los posibles viajes del Universo.

En el capítulo anterior hemos visto como, en ciertos modelos de energía fantasma, los agujeros de gusano podían crecer debido a la acreción de esta sustancia hasta tal punto que llegaran a ser mayores que el propio universo. En este caso, el universo sería engullido por un agujero de gusano y emprendería un gran viaje a través de él. Cierta halo de misterio cubre indudablemente a un fenómeno de esta naturaleza y poco conocemos de cual sería el destino de nuestro universo en este escenario; sin embargo, se debe destacar que sea cual sea el destino del universo, no tendría porqué ser más catastrófico que el que sufriría sin este viaje, ya que en el tipo de modelos en los que dicho viaje ha sido encontrado éste serviría para escapar del final cósmico pronosticado.

Por otro lado, los agujeros negros también podrían llegar a tener gran relevancia a escalas cosmológicas si, debido a la acreción de energía oscura, pudieran llegar a engullir al universo. Aunque considerando válida la aproximación en la que este proceso se estudia mediante un agujero negro asintóticamente plano, que utilizaremos por considerarla la mejor forma de tratar el proceso, parece que este gran engullimiento estaría prohibido por los datos obtenidos en las observaciones<sup>1</sup> en modelos 4-dimensionales, homogéneos e isotrópicos; la posibilidad de que éste se presente en otros escenarios debe ser tenida en cuenta, sin embargo.

En esta sección estudiaremos un modelo particular que describe una evolución simétrica para intentar profundizar en la comprensión del gran viaje, aunque, como veremos, este modelo llevará asociadas ciertas características inesperadas en lo que se refiere al fluido oscuro utilizado (véase la subsección 3.1.1). Al estudiar el proceso de acreción de energía oscura en objetos astronómicos veremos como la consideración de un modelo simétrico que duplica las singularidades no implica en sí la duplicación de las posibles divergencias de los agujeros de gusano; sin embargo, en este escenario, sí ocu-

---

<sup>1</sup>Como hemos visto en la subsección 2.1.2, la consideración de efectos cosmológicos en el proceso de acreción podría acelerar el crecimiento de los agujeros de forma tal que un fenómeno de estas características tuviera lugar.

rrirían varias de estas divergencias relativas a distintos observadores y probablemente asociadas a distintos agujeros de gusano para cada observador, llegándose también a tener agujeros negros infinitamente grandes (3.1.2). Por último, este escenario nos permitirá estudiar diferentes tipos de viajes que nuestro universo podría emprender al verse englobado en un objeto astronómico (véase la subsección 3.1.3).

### 3.1.1. La energía fantasma dual y la posible discretización de $w$ .

Un modelo de Randall-Sundrum tipo 1 [20], a grandes rasgos, es un modelo de  $4+1$  dimensiones que contiene una 3-brana ( $3+1$ -dimensional) en la que se encuentran confinados los campos materiales, pudiendo ser la dimensión extra infinitamente grande<sup>2</sup>. En un escenario de este tipo, las ecuaciones de evolución del factor cósmico de escala de la brana serán similares a las ecuaciones de Friedmann pero con ciertas correcciones con lo que, si consideramos que esta brana es nuestro Universo espacialmente plano, sus ecuaciones de evolución se pueden escribir como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} \left[ \rho + 3p + \frac{\rho}{\lambda} (2\rho + 3p) \right], \quad (3.1.2)$$

donde  $\lambda > 0$  es la tensión de la brana y vamos a considerar una evolución simétrica desde un tiempo infinitamente negativo a otro infinitamente positivo.

Si la brana está llena de energía oscura con  $w = p/\rho$  constante, la expresión del factor cósmico de escala en la brana se puede obtener a partir de las Eqs. (3.1.1) y (3.1.2) o, de una forma más simple, a partir de la Eq. (3.1.1) y teniendo en cuenta que el fluido se debe conservar en la brana, es decir, debe cumplir la ecuación de conservación ordinaria  $\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0$ . Cualquiera de estos procedimientos produce [19]:

$$[a(t)]^{-3(1+w)} = \frac{s}{1 - 12\pi\lambda(1+w)^2(t - t_1)^2}, \quad (3.1.3)$$

donde  $s$  y  $t_1$  son constantes<sup>3</sup>, la segunda de las cuales podría ser considerada cero sin pérdida de generalidad obteniendo una evolución simétrica, aunque, de momento, la

<sup>2</sup>Para más información acerca de estos modelos se puede consultar [111; 112; 137].

<sup>3</sup>Se debe notar que  $s = -2\lambda a_0^{-3(1+w)}/\rho_0$  se puede considerar positiva ya que, como veremos, si  $s > 0$  se tiene  $\text{sign}(a_0^{-3(1+w)}) \neq \text{sign}(\rho_0)$  en todas las regiones. Si se considerase  $s < 0$ , la discretización que aparecerá más adelante para el parámetro de la ecuación de estado en la primera y tercera región dejaría de ser necesaria en estas regiones pero pasaría a serlo en la segunda región, es decir para  $t_- < t < t_+$ .



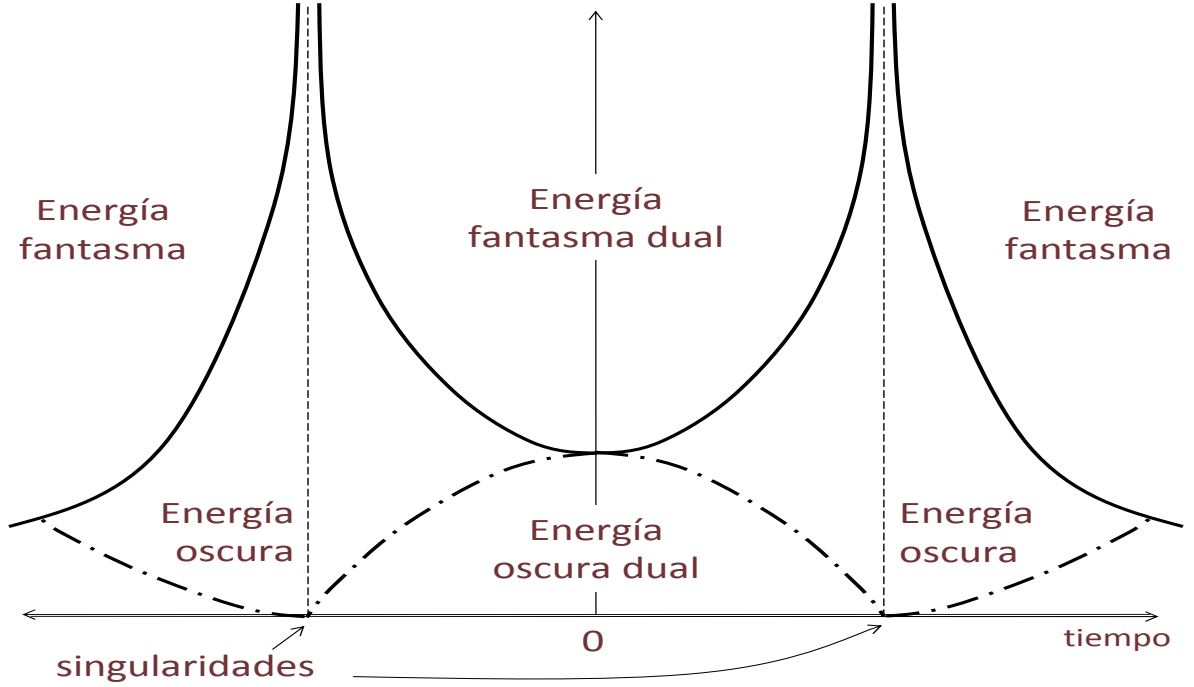


Figura 3.1: La línea continua (discontinua) representa la evolución del factor cósmico de escala en el modelo fantasma (con  $w > -1$ ), donde hemos considerado  $t_1 = 0$  sin pérdida de generalidad. En la región central, entre las singularidades, el fluido que llena la brana es energía fantasma (oscura) dual.

mantendremos en las expresiones. Se puede ver que el lado derecho de la Eq. (3.1.3) diverge en

$$t_{\pm} = t_1 \pm \frac{1}{2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}}; \quad (3.1.4)$$

apareciendo dos divergencias del factor cósmico de escala si  $1+w < 0$  y dos ceros de éste si  $1+w > 0$ . De hecho, en este modelo, se puede ver que

$$H(t) = -\frac{8\pi\lambda(1+w)(t-t_1)}{1-12\pi\lambda(1+w)^2(t-t_1)^2}, \quad (3.1.5)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi\lambda(1+w)[1+4\pi\lambda(1+4w+3w^2)(t-t_1)^2]}{[1-12\pi\lambda(1+w)^2(t-t_1)^2]^2}, \quad (3.1.6)$$

con lo que el escalar de curvatura de nuestro universo 4-dimensional,  $R = 6(\ddot{a}/a + H^2)$ , diverge cuando  $t \rightarrow t_{\pm}$  en ambos modelos. De esta forma, el modelo sufrirá dos grandes desgarros si  $w < -1$  y dos grandes implosiones-explosiones si  $-1/3 > w > -1$ . Ambos modelos están representados en la Fig. (3.1).

Se debe notar que la densidad de energía oscura en la región central,  $t_- < t < t_+$ ,

que, al menos en el caso fantasma, puede describir a nuestro universo, es

$$\rho = -\frac{2\lambda}{1 - 12\pi\lambda(1+w)^2(t-t_1)^2} < 0, \quad (3.1.7)$$

por lo que no correspondería a energía oscura ordinaria. Llamaremos a este tipo de fluido energía fantasma dual<sup>4</sup> en el caso en el que  $w < -1$  y energía oscura dual si  $w > -1$ , notando que la consideración de la posible existencia de estos fluidos cobra sentido en un contexto de branas en el que se puede tener una  $\rho_{\text{eff}} > 0$ , donde  $\rho_{\text{eff}} = 3H^2/(8\pi)$ , con  $\rho < 0$ . Para una mejor comprensión de la energía fantasma dual estudiaremos el modelo en mayor profundidad, teniendo en cuenta que uno similar podría ser planteado con la energía oscura dual, aunque este segundo modelo no podría describir la época actual de nuestro universo en su región intermedia.

En el caso en el que consideremos la energía fantasma dual se tiene, por tanto,  $\rho < 0$ ,  $\rho + p > 0$  y  $\rho + 3p > 0$ ; así, mientras que la energía fantasma viola todas las condiciones de energía, su dual cumple las condiciones nula y fuerte. Por lo tanto, aunque la energía fantasma dual pudiera parecer a simple vista una sustancia todavía más extraña que la energía fantasma, un estudio más detallado nos sugiere que ésta sería, en principio, más ortodoxa. Otro argumento a favor de esta afirmación lo podemos encontrar considerando que este fluido podría estar generado por un campo escalar sin masa tal que

$$\rho = K + V, \quad p = K - V, \quad (3.1.8)$$

donde el término cinético se define como  $K = \dot{\phi}^2/2$  y  $V = V(\phi)$  es el término potencial. Teniendo en cuenta la Eqs.(3.1.8), (3.1.7) y  $p = w\rho$ , se puede obtener

$$\phi(t) = \phi_1 \pm \frac{1}{\sqrt{6\pi|1+w|}} \arcsen \left[ 2\sqrt{3\pi\lambda}|1+w|(t-t_1) \right], \quad (3.1.9)$$

con lo que, a diferencia de la energía fantasma convencional, la energía fantasma dual permite tener un campo escalar real y un término cinético positivo. Por otro lado, las Eqs. (3.1.8) y (3.1.9) implican

$$V(\phi) = -\frac{\lambda(1-w)}{\cos^2 \left[ \sqrt{6\pi|1+w|}(\phi - \phi_1) \right]}. \quad (3.1.10)$$

Así, al menos en la región  $t_- < t < t_+$ , tenemos un modelo que cumple las condiciones de energía nula y fuerte con un término cinético positivo y un potencial negativo. Por lo tanto, la energía fantasma es muy diferente de su correspondiente dual, aunque ambos comparten la predicción de grandes desgarros.

---

<sup>4</sup>Nuestra definición de dual no debe ser confundida con la utilizada en la Ref.[138].

Clásicamente una singularidad rompe el espaciotiempo, estando por lo tanto nuestro modelo dividido en tres regiones que no pueden ser conectadas causalmente entre sí al menos en principio. No obstante, dichas regiones podrían estar conectadas mediante grandes viajes. Así, si queremos estudiar las regiones de este modelo para  $t < t_-$  y  $t > t_+$  podemos notar que para que el factor de escala dado por la Eq. (3.1.3) esté bien definido, debemos requerir necesariamente

$$|1 + w| = \frac{1}{6(n+1)}, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.1.11)$$

En estas regiones, el espacio estaría lleno de energía fantasma usual, es decir  $\rho > 0$  y  $p + \rho < 0$ , por lo que si quisiéramos entender dicho fluido mediante un campo escalar sin masa, éste tendría un término cinético negativo. A la vista del comportamiento del factor cósmico de escala, Eq. (3.1.3), podemos concluir que en este modelo habrá una primera región en la que el universo se expande de forma acelerada, para acabar en un gran desgarró, una segunda en la que el universo se contrae desde un gran desgarró hasta un tamaño mínimo no-nulo, para después expandirse de nuevo de forma acelerada, acabando su evolución en una singularidad del mismo tipo; finalmente, en una tercera región, el universo se contrae indefinidamente, tendiendo a cero en un tiempo infinitamente grande. Esta evolución está representada en la Fig. (3.1).

Se debe subrayar que la posible existencia del fluido dual<sup>5</sup>, al menos en el presente modelo, es un hecho directamente conectado con la consideración de un escenario de branas. Así, se puede ver que en el límite clásico en el que los efectos de la brana no aparecen, es decir  $\lambda \rightarrow \infty$ , los dos grandes desgarró se convertirían en uno sólo, desapareciendo la región intermedia. Aunque normalmente los modelos de branas se utilizan para la descripción del universo en sus etapas iniciales de vida, que es donde se espera que sus efectos sean relevantes, nosotros hemos considerado lo contrario. Esto es debido al hecho de que, en este caso, los efectos de la brana serían relevantes a  $\rho$  grande comparado con la tensión de la brana  $\lambda$ , sin tener porque ser necesario que el factor cósmico de escala sea pequeño.

Si consideráramos el modelo con  $w > -1$ , obtendríamos un factor cósmico de escala que describiría un universo que se contraería inicialmente hasta alcanzar una singularidad en  $a = 0$ , una gran implosión con respecto a un observador en esta primera región y una gran explosión para un observador en la región intermedia; el universo en la segunda región nacería a partir de esta singularidad, expandiéndose de forma decelerada hasta alcanzar un tamaño máximo finito para luego contraerse hasta otra

---

<sup>5</sup>En la subsección 3.3.2 aparecerá un fluido oscuro dual, que al contrario que la energía fantasma dual viola todas las condiciones de energía, en un escenario 4-dimensional al estar compensado por una constante cosmológica positiva. Sin embargo, dado lo patológico de este fluido consideraremos que sólo puede existir en cantidades pequeñas, como confirmaremos que es el caso en la subsección 3.3.3

gran implosión; finalmente, en la tercera región, el universo evolucionará desde una gran explosión expandiéndose de forma acelerada (véase la Fig (3.1)). En este caso, mientras que la primera y tercera región estarían llenas de energía oscura usual, en la segunda región la sustancia presente sería energía oscura dual, la que violaría todas las condiciones de energía. Una vez más, la región intermedia, y con ella la energía oscura dual, desaparecerían en el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Finalmente queremos recalcar que, como hemos visto en el caso  $w < -1$  y se puede obtener fácilmente si  $w > -1$ , la consideración de las tres regiones que cubren el intervalo de tiempo completo es posible solamente si el parámetro de la ecuación de estado toma uno de los valores discretos posibles dados por (3.1.11). Aunque todavía no hemos llegado a comprender el significado más profundo de esta discretización<sup>6</sup> clásica, si es que lo tiene, ésta implica la discretización de todas las cantidades dinámicas involucradas, como la densidad de energía, la presión, el potencial y el campo escalar, así como de los grandes desgarrs, las grandes implosiones-explosiones. Además, dicha discretización permite la existencia de otras regiones que, como veremos, podrán ser conectadas con la región intermedia, permitiendo que la consideración de todo el intervalo de tiempo cobre un sentido bien definido.

### 3.1.2. Sorprendentes consecuencias del proceso de acreción.

A parte de su interés intrínseco la solución anteriormente mostrada podría plantear la cuestión sobre si el crecimiento extremo de los agujeros de gusano mostraría la misma simetría que dicha solución, presentándose dos grandes viajes en la segunda región en las proximidades de los grandes desgarrs. En este caso y si nos encontráramos en esta región, sería plausible que el puente espaciotemporal que recorrería el universo en el futuro se podría conectar con el que tuviera lugar en el pasado, haciendo que el universo futuro retomara su propia historia una y otra vez a partir de su evolución pasada en las proximidades del momento de la divergencia del agujero de gusano en el pasado. Así, nuestro modelo, aunque por razones físicas totalmente diferentes, recordaría al modelo de Gödel que permitía la aparición de curvas temporales cerradas. Por otro lado, si en este escenario también se pudiera producir un crecimiento divergente de los agujeros negros, se podría pensar que también formarían una conexión de este tipo, aunque, en este caso, el puente entre el futuro y el pasado debería tener un carácter irreversible.

En el Capítulo 2 hemos mostrado un método de acreción que podría permitir la extracción de conclusiones sobre la posible evolución de los objetos astronómicos ante-

---

<sup>6</sup>La discretización del parámetro  $w$  ya fue considerada en la Ref. [136] al continuar un modelo fantasma ordinario con  $w$  constante más allá del gran desgarr.

riores en cualquier modelo 4-dimensional homogéneo e isótropo, Eqs. (2.1.25) y (2.2.21); sin embargo, en el caso en el que consideramos un universo descrito por una brana contenida en un espacio de mayor dimensión, la dinámica del universo se verá afectada y, por tanto, también lo será el proceso de acreción de estos objetos. La única posibilidad de recuperar los resultados obtenidos en el caso 4-dimensional, sería suponer que el fluido acretado se puede considerar aproximadamente descrito por sus parámetros efectivos. Sin embargo, esta consideración distaría mucho de los resultados que se podrían obtener al considerar, en un tratamiento más apropiado, al fluido caracterizado por sus cantidades físicas; como se pondrá de manifiesto por el hecho de que los agujeros negros tengan un crecimiento divergente en las cercanías de los grandes desgarros que no podría ser inferido a partir del uso de los parámetros efectivos.

Por lo tanto, para estudiar la evolución de los agujeros de gusano utilizaremos la Eq. (2.2.20), obtenida en el capítulo anterior, en el caso de un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne dinámico y válida para un observador asintótico, aplicándola ahora a las cantidades físicas del fluido que llena la brana. Así, tenemos

$$\dot{m} = -4\pi Q m^2 (p + \rho) = \frac{8\pi\lambda Q |1 + w| m^2}{12\pi\lambda(1 + w)^2 t^2 - 1} \quad (3.1.12)$$

donde hemos utilizado la Eq. (3.1.7) y hemos centrado nuestra solución en el origen,  $t_1 = 0$ . Integrando esta expresión, se obtiene

$$m(t) = \frac{m_0}{1 - 4Qm_0 \sqrt{\frac{\pi\lambda}{3}} \ln \left[ \frac{(1-2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t)(1+2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t_0)}{(1+2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t)(1-2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t_0)} \right]}, \quad (3.1.13)$$

que diverge en

$$t_* = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} t_+, \quad (3.1.14)$$

donde

$$\xi = \frac{1 - t_0/t_+}{1 - t_0/t_-} e^{1/(4Qm_0\sqrt{\pi\lambda/3})}, \quad (3.1.15)$$

y  $t_{\pm}$  son los tiempos a los que los dos grandes desgarros se presentan, definidos en la Eq. (3.1.4).

La Eq. (3.1.14) implica que los agujeros de gusano se harán infinitamente grandes en  $t_*$  dependiendo este momento de los parámetros involucrados. Las situaciones posibles son: (1) si  $0 < t_0 < t_+$ , que fija  $\xi > 0$ , y  $m_0$  es tal que  $\xi > 1$ , el crecimiento divergente del agujero de gusano se producirá en un  $t_*$  perteneciente al intervalo  $(t_-, 0)$  (una situación que también corresponde a considerar  $t_- < t_0 < 0$  y  $\xi > 1$ ); (2) si  $0 < t_0 < t_+$  y  $\xi < 1$ , entonces  $0 < t_* < t_+$  (que también se obtiene de  $t_- < t_0 < 0$  y  $\xi < 1$ ); (3) si  $t_+ < t_0$ , entonces  $\xi < 0$ , y  $|\xi| > 1$ , siguiéndose que  $t_* < t_-$  (lo que también sucede si  $t_0 < t_-$  y  $|\xi| > 1$ ); y (4) si  $t_+ < t_0$  y  $|\xi| < 1$ , el tamaño del agujero de gusano

excederá al del universo en un  $t_*$  en el intervalo  $(t_+, \infty)$  (como ocurre si  $t_0 < t_-$  con  $|\xi| < 1$ ).

Por lo tanto, respecto a distintos observadores, habrá diferentes momentos a los que los agujeros de gusano tendrán un tamaño infinitamente grande, implicando otro momento en su cercanía en el que el agujero igualaría el tamaño del universo iniciando así este segundo un gran viaje. Se debe notar que si consideramos, por ejemplo, un observador en la región acelerada  $0 < t_0 < t_+$ , con respecto a éste, el universo podría viajar en dos ocasiones, una después del primer gran desgarró y otra antes del segundo. Sin embargo, esta duplicación de los crecimientos divergentes de los agujeros de gusano no es debida simplemente a la duplicación de los grandes desgarró sino al comportamiento diferente de distintos agujeros de gusano ya que, a  $t_0$  fijo, el valor de  $\xi$  depende de la masa del agujero de gusano medida por el observador, con lo que los fenómenos relativos a distintos valores de  $\xi$  se podrían deber a diferentes agujeros.

Por otro lado, una situación similar, aunque no la misma, puede ser obtenida en lo relativo al posible crecimiento divergente de los agujeros negros. A partir de las Eqs. (2.1.22) y (3.1.7) se tiene

$$\dot{M} = 4\pi AM^2(p + \rho) = -\frac{8\pi\lambda A|1+w|M^2}{12\pi\lambda(1+w)^2t^2 - 1}, \quad (3.1.16)$$

lo que implica una evolución de la masa del agujero negro dada por

$$M(t) = \frac{M_0}{1 + 4AM_0\sqrt{\frac{\pi\lambda}{3}}\ln\left[\frac{(1-2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t)(1+2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t_0)}{(1+2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t)(1-2|1+w|\sqrt{3\pi\lambda}t_0)}\right]}. \quad (3.1.17)$$

Así, el agujero negro será infinitamente grande cuando el tiempo alcanza valores

$$t_{**} = \frac{1-\eta}{1+\eta}t_+, \quad (3.1.18)$$

donde

$$\eta = \frac{1-t_0/t_+}{1-t_0/t_-}e^{-1/(4AM_0\sqrt{\pi\lambda/3})}. \quad (3.1.19)$$

Podemos de esta forma obtener un conjunto de  $t_{**}$  en los que los agujeros negros serán infinitamente grandes, dependiendo de los distintos observadores que puede observar agujeros negros con masas  $M_0$ . Así, cuando un agujero negro crece de forma divergente, habrá un momento anterior en el que igualará al tamaño del universo, quedando éste engullido dentro del agujero. Las distintas divergencias de los agujeros negros y de gusano se muestran en la Fig. (3.2) y, en la próxima subsección, discutiremos como pueden ser conectadas todas las regiones del intervalo de tiempo completo evitando pasar por la singularidad. Aunque ha sido señalado que en modelos de branas Randall-Sundrum 1 podrían no existir soluciones estáticas de agujeros negros, [111], lo que

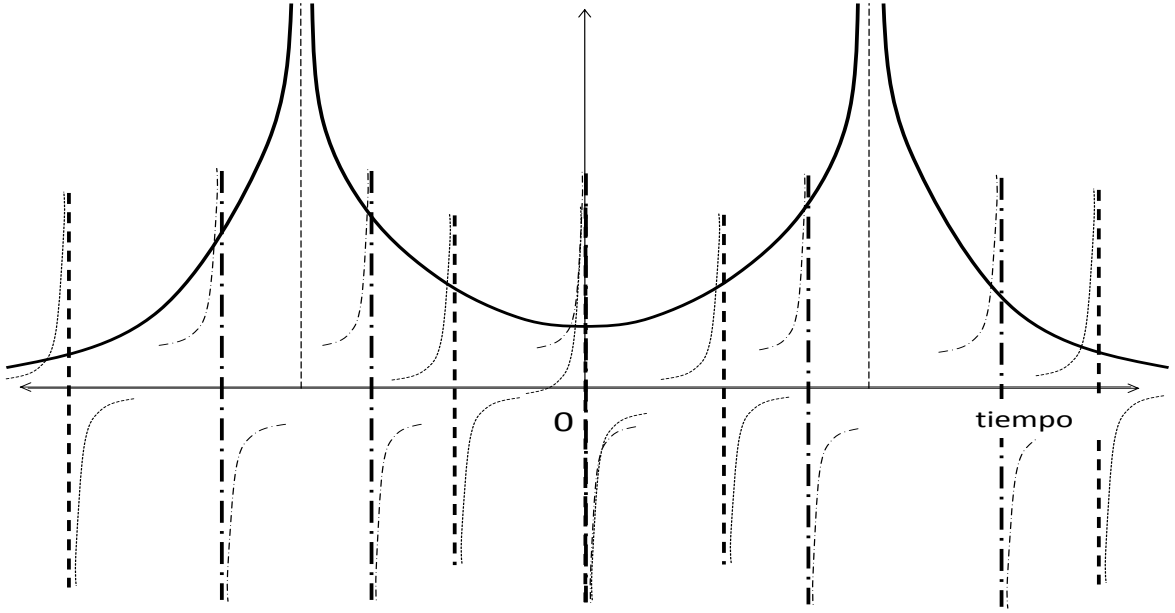


Figura 3.2: Distribución de las divergencias del tamaño de los agujeros negros y de gusano en el modelo fantasma. La posición exacta dependerá de las masas iniciales  $M_0$  y  $m_0$ .

haría nuestra consideración sobre su posible acreción irrelevante, debemos destacar que, a parte de que cualquier modelo que pretenda describir nuestro universo debe contener agujeros negros, nuestras consideraciones sobre el crecimiento de estos objetos se basan en una métrica no-estática y, en cualquier caso, el método utilizado siempre será susceptible de tomarse como una aproximación en la que pudieran considerarse distintos tipos de agujeros negros.

Por otro lado, queremos mencionar que la consideración del modelo con  $w > -1$  también produciría la divergencia de los agujeros negros y de gusano a un tiempo

$$T_{**} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} t_+, \quad (3.1.20)$$

con

$$\mu = \frac{1 - t_0/t_+}{1 - t_0/t_-} e^{1/(4AM_0\sqrt{\pi\lambda/3})}, \quad (3.1.21)$$

en el caso de los agujeros negros, y

$$\mu = \frac{1 - t_0/t_+}{1 - t_0/t_-} e^{-1/(4Qm_0\sqrt{\pi\lambda/3})}, \quad (3.1.22)$$

para los agujeros de gusano, donde  $t_{\pm}$  ahora indican dos grandes implosiones-explosiones. Una vez más, estos eventos llenarían todo el intervalo de tiempo de  $-\infty$  a  $+\infty$  de forma tal que, para diferentes observadores situados en distintos momentos de este intervalo, el universo no debería pasar por las singularidades necesariamente.

### 3.1.3. Puentes al pasado y al futuro.

Los agujeros de gusano de Morris-Thorne pueden ser convertidos en máquinas del tiempo, permitiendo a cualquier objeto que pase a través de ellos viajar hacia el pasado o el futuro [8; 101]. Así, ya que el espaciotiempo en el que está contenido el agujero de gusano es dinámico, se expande o contrae, se esperaría que los enormes agujeros de gusano que hemos considerado se comporten como máquinas del tiempo, haciendo al universo y a todo lo que contiene viajar temporalmente durante el gran viaje. Como ya hemos mencionado en el Capítulo 2, aunque la conjetura del censor cósmico, [102], prohibiera la conversión de los agujeros de gusano en máquinas del tiempo, dicha conjetura se violaría precisamente al considerar el crecimiento de estos agujeros debido al proceso de acreción cuando éste pudiese dar lugar a dicho gran viaje [120].

En la subsección previa hemos obtenido distintos momentos en los que, en el marco considerado, podrían aparecer agujeros negros o de gusano inusitadamente grandes, con lo que se podrían formar diferentes puentes que conectasen el pasado y el futuro del universo sorteando o no las singularidades presentes en el modelo, grandes desgarros si  $w < -1$  y grandes implosiones-explosiones si  $w > -1$ . Para determinar la estructura y propiedades de dichos puentes tendremos que tener en cuenta dos requisitos, que podrían ser entendidos como dos expresiones diferentes de la misma condición; estos son: (1) los crecimientos de los objetos astronómicos se derivan de estudios que en principio son estrictamente válidos para observadores asintóticos,  $r \rightarrow \infty$ , pareciendo producir resultados diferentes al considerar otro límite en el caso de los agujeros de gusano, [119], aunque estos pudieran ser los mismos al considerar agujeros negros (véanse los comentarios en la subsección 2.1.1 del Capítulo 2 a este respecto); (2) los métodos utilizados se basan en el estudio de soluciones asintóticamente planas que se consideran insertadas en nuestro Universo. El planteamiento de los lugares donde estos objetos astronómicos absurdamente grandes podrían estar insertados cuando el universo se encuentra dentro de ellos así como la posible definición de un límite asintótico a estos objetos, nos llevará a comprender los tipos de puentes por los que podría viajar el universo. Estos son:

**Procesos que involucran a un sólo agujero de gusano.** Este proceso corresponde al *gran viaje* en su concepción original [13; 120]. Si consideramos un sólo agujero de gusano que crece a una velocidad superior a la de la expansión del universo, llegará un momento, cerca del cual ciertas cantidades de energía podrían viajar a través de él, en el que dicho agujero de gusano será mayor que el horizonte cosmológico, no pudiendo insertar sus bocas por más tiempo dentro de este universo. En este marco se debe recurrir necesariamente a otros universos, suficientemente grandes, para que este proceso



pueda tener lugar. Por lo tanto, este gran viaje cobraría sentido en un escenario de multiverso donde las condiciones de empalme de Israel pudieran cumplirse, [139]. Se debe destacar que, en este caso, la falta de un tiempo común para el conjunto de universos considerado haría que este proceso consistiera en una simple transferencia de energía sin implicar violaciones de la causalidad, viajando el universo inicial al completo a otro universo mayor (de forma tal que pareciera provenir de un tercero) y no a través de su propio tiempo (véase la parte derecha de la Fig. (3.3)).

**Procesos que involucran a una pareja de agujeros de gusano.** Si consideramos dos agujeros de gusano, uno en el pasado y otro en el futuro, que crecen llegando a ser mayores que el universo en el que están inicialmente implantados, estos agujeros de gusano no podrán seguir estando insertados en dicho universo. En una situación de este tipo, las bocas de uno de estos agujeros de gusano podrían ensamblarse a las del otro agujero<sup>7</sup>, conectándose los agujeros de gusano mutuamente de forma tal que, durante el tiempo en el que su tamaño ha superado al del horizonte cosmológico, formaran un túnel compacto, cerrado y rápidamente creciente que podríamos llamar *gran beso*. Este gran beso siempre podría ser realizado en un modo que cumpliera las condiciones de empalme ya mencionadas y, por lo tanto, permitiendo la conexión entre el pasado y el futuro del universo. El universo atrapado dentro de este objeto viajaría así a través de su propio tiempo<sup>8</sup> y, una vez que estos agujeros de gusano dejaran de existir como tales después de haber tenido un tamaño infinitamente grande, el universo continuaría su evolución causal convencional a partir del momento en el que acabó su viaje (véase la parte izquierda de la Fig. (3.3)).

**Procesos que involucran a un agujero negro y a un agujero de gusano.** Un proceso similar al anteriormente descrito pero en el que uno de los agujeros de gusano fuera sustituido por un agujero negro, también podría tener lugar en este escenario. En este caso una vez formada la estructura resultante ésta sólo tendría una dirección posible, debido al carácter unidireccional de la membrana del agujero negro, obligando al universo en su interior a viajar hacia su pasado o su futuro dependiendo el caso.

---

<sup>7</sup>Estamos considerando agujeros de gusano que se encuentran en un universo dinámico. No sería extraño pensar que, en este régimen, la unión de estos objetos se hace posible al estar fuera del tiempo del universo.

<sup>8</sup>Para que el viaje del universo no sea abrupto, se debe esperar que necesariamente sea la boca de pasado de un agujero de gusano la que se una a la de futuro del otro, y viceversa. Debemos reiterar que los agujeros de gusano en este marco se pueden considerar máquinas del tiempo, por lo que denominamos boca de futuro (pasado) del agujero de gusano a aquella por la que si salimos implica un viaje hacia el futuro (pasado).

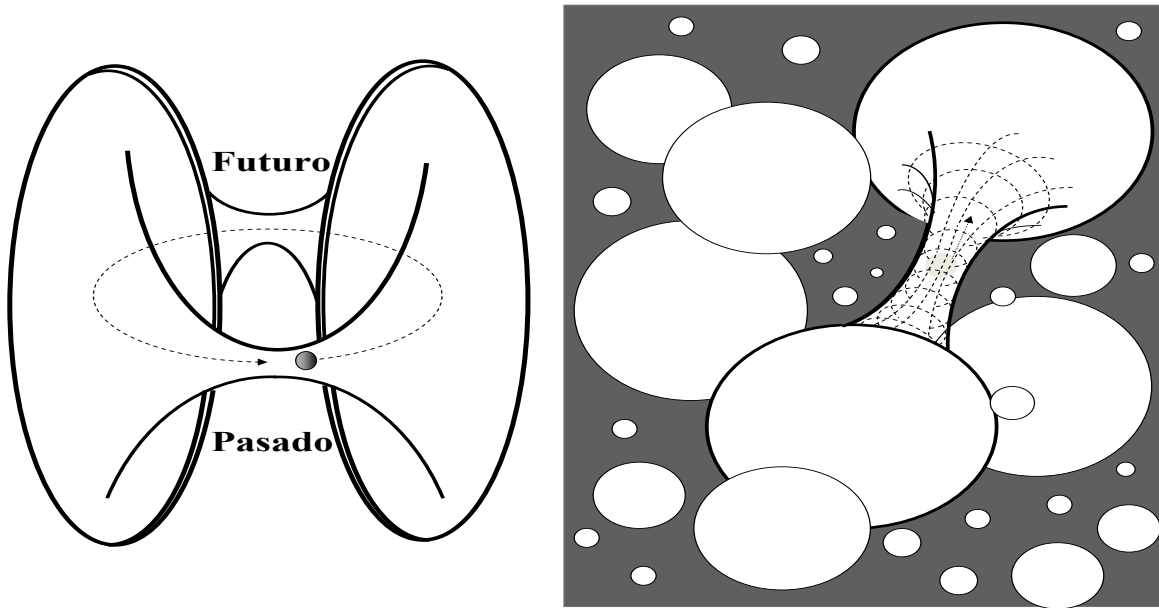


Figura 3.3: A la izquierda mostramos la construcción formada por dos agujeros de gusano, el gran beso, mientras que a la derecha incluimos una representación figurada del proceso que tendría lugar cuando se produce un sólo gran viaje.

A la vista de los distintos puentes por los que nuestro universo podría viajar es necesario reflexionar unos momentos sobre como afectarían estas conexiones a la causalidad, que esperamos no se viole violentamente en un modelo consistente aunque sólo sea, como dijo Hawking [102], porque hordas de turistas del futuro no nos están invadiendo, o por consideraciones paradójicas tales como las que se podrían derivar de un individuo con propósitos homicidas hacia sus ancestros. Para esto debemos tener en cuenta que los agujeros de gusano pueden ser estables ante los efectos cuánticos en la cercanía del gran viaje. De esta forma, podríamos despreocuparnos de las posibles cantidades de energía que pasaran a través de él antes de este momento, ya que éstas deberían ser pequeñas para mantener la estabilidad de un agujero que todavía no sufriría un crecimiento suficientemente super-acelerado. Una vez que el universo se encuentra dentro del agujero de gusano, en el primer caso, como hemos mencionado, no habría viaje temporal propiamente dicho, ya que el universo no viajaría a través de su tiempo. En los casos segundo y tercero sí habría un viaje temporal del universo, pero se debe destacar que éste sería del universo como un todo, lo que no permitiría que la causalidad se violara localmente. Por lo tanto, si el universo acabara este viaje en el pasado (futuro), lo acabaría en un estado similar al que él tenía (tendría) en su pasado (futuro si hubiera seguido su evolución ordinaria). En particular, si consideráramos al individuo anteriormente mencionado en un universo a punto de iniciar un gran viaje hacia el pasado, por muy feliz que él se sintiese pensando que por fin podría cumplir sus propósitos, al

finalizar el gran viaje el universo se encontraría en un estado en el que dicho individuo todavía no habría nacido, evitando cualquier paradoja de este tipo.

### 3.2. Un final del mundo inesperado: la gran congelación.

La posibilidad de que la energía fantasma sea la sustancia dominante en la dinámica de nuestro universo nos podría guiar a un final catastrófico, el gran desgarró [6], que poco tendría que ver con la tranquila muerte térmica que se esperaba antes de que surgiera la posibilidad de ese fenómeno y que seguiría estando pronosticada por modelos no-fantasma. Como acabamos de mostrar, dicho gran desgarró podría incluso aparecer por partida doble si consideráramos que la energía fantasma está confinada en la brana que describiría nuestro universo, en un escenario basado en el modelo de Randall-Sundrum de tipo 1, [20].

Por otra parte, si futuras observaciones fijaran el parámetro de la ecuación de estado del fluido oscuro de forma tal que  $w < -1$ , no deberíamos confundir este hecho con la afirmación de que nuestro universo se encuentre inevitablemente destinado a acabar desgarrándose, sin poseer información adicional sobre la ecuación de estado de este fluido. En particular, Bouhmadi-López y Jiménez Madrid, [7], mostraron que este no sería el caso si dicha ecuación de estado tomara la forma de la de un gas de Chaplygin generalizado (GCG), ya que en este caso el comportamiento del universo en un futuro asintótico sería similar al de un modelo de Sitter en el que la energía oscura estuviera descrita por una constante cosmológica, hecho que ya había sido indicado por González-Díaz al estudiar un fluido de este tipo con una generalización mayor de dicha ecuación de estado aunque con un comportamiento asintótico similar, [69]. De esta forma, cabría preguntarse si la dominación de un fluido fantasma con una ecuación de estado de este tipo permite en cualquier caso una evolución segura del universo.

En la presente sección veremos que el gas de Chaplygin generalizado fantasma (PGCG) estudiado por Bouhmadi-López y Jiménez Madrid [7] corresponde a un caso particular de PGCG, pudiendo definirse otros fluidos de este tipo cuya dominación implicaría un final cósmico de naturaleza distinta al gran desgarró que, debido a sus características, llamaremos gran congelación 3.2.1, [21]. Por otro lado, dado el doblado de singularidades que hemos presentado en la sección anterior en un modelo particular inspirado en el escenario de Randall-Sundrum tipo 1, estudiaremos si la consideración del fluido dual del PGCG (DPGCG) podría cambiar cualitativamente la evolución del universo. Como veremos en la subsección 3.2.2 al estudiar ciertos modelos de DPGCG,

[21; 22], mientras que el comportamiento futuro de estos modelos sería similar al correspondiente de sus compañeros no duales, una posible fase de expansión decelerada anterior a la acelerada no será descartada, quedando abierta la posibilidad de que el doblado de singularidades vuelva a tener lugar al utilizar esta extraña ecuación de estado. En la subsección 3.2.3, comentaremos las características de los modelos mencionados en el pasado lejano del universo ya que, aunque esperamos que en este régimen la dinámica cosmológica esté dominada por otras componentes de energía, dicho estudio nos ayudará a comprender el comportamiento del modelo; también presentaremos nuevos tipos de GCG que si bien no pueden describir la evolución de nuestro universo actual, sí nos mostrarán resultados importantes desde el punto de vista teórico, ya que evidenciarán que la gran congelación no es un fenómeno exclusivo de los modelos fantasma [22]. Finalmente, señalaremos que cuando la gran congelación aparece en un modelo fantasma 4-dimensional ésta podría ser evitada por un gran viaje, mientras que si tuviera lugar en los modelos DPGCG anteriormente estudiados, dicho gran viaje no sería posible, siendo la evolución de los agujeros negros la que dictase su suerte [16] (véase la subsección 3.2.4).

### 3.2.1. El futuro dictado por un PGCG.

El GCG, [63; 64; 140; 141; 142; 143; 144], es una sustancia que satisface una ecuación de estado del tipo

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (3.2.1)$$

donde  $A$  es una constante positiva y  $\alpha$  un parámetro. En el caso particular en el que  $\alpha = 1$ , la Eq. (3.2.1) corresponde a la ecuación del gas de Chaplygin original [63]. Si consideramos un modelo homogéneo e isótropo, es decir, en el que la métrica sea FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), la ecuación de conservación del fluido en este escenario junto con la ecuación de estado (3.2.1) implican

$$\rho = \left( A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.2.2)$$

con  $B = (\rho_0^{1+\alpha} - A) a_0^{3(1+\alpha)}$  una constante. A la vista de las expresiones (3.2.1) y (3.2.2), se puede apreciar que, ya que se considera  $A > 0$ , el GCG describe un fluido que satisface la condición de energía nula,  $p + \rho > 0$ , si  $B > 0$ , mientras que si la constante  $B$  es tal que  $B < 0$ , el fluido dejará de satisfacer dicha condición. Así, Bouhmadi-López y Jiménez Madrid, [7] (véase también [68]) consideraron la posibilidad de estudiar un PGCG.

De hecho existirían más tipos de PGCG que pueden ser obtenidos al generalizar aún más la ecuación de estado (3.2.1), considerando que la constante  $A$  no tiene que

ser necesariamente positiva. Así, los fluidos de este tipo serán aquellos que cumplan dicha ecuación de estado y dos condiciones: (i)  $\rho > 0$  y (ii)  $p + \rho < 0$ . Inspeccionando las Eqs. (3.2.1) y (3.2.2) se puede notar que existen cuatro posibilidades, [22], que son:

1.  $A > 0$ ,  $B < 0$  y  $1 + \alpha > 0$ .
2.  $A > 0$ ,  $B < 0$  y  $1 + \alpha < 0$ .
3.  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $1 + \alpha > 0$  y  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n$ , con  $n$  un entero positivo.
4.  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $1 + \alpha < 0$  y  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n$ , con  $n$  un entero negativo.

Cada una de estas posibilidades corresponde a un tipo diferente de PGCG, permitiéndonos considerar cuatro modelos cosmológicos espacialmente planos distintos cumpliendo las ecuaciones de Friedmann que, en este caso, se pueden escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left( A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.2.3)$$

$$\dot{H} = -4\pi\rho \left( 1 - \frac{A}{\rho^{1+\alpha}} \right). \quad (3.2.4)$$

Así, la Eq. (3.2.4) nos dice que, al presentar todos los modelos  $p + \rho < 0$ , tales modelos describirán una expansión súper-acelerada.

**PGCG 1.**  $A > 0$ ,  $B < 0$  y  $1 + \alpha > 0$ . La evolución futura de un modelo lleno con este fluido fue precisamente la estudiada por Bouhmadi-López y Jiménez Madrid en la Ref. [7] y que, como repasaremos a continuación, permite una evolución suave del universo en el futuro a pesar de la naturaleza fantasma del fluido considerado.

A partir de la Eq. (3.2.2) se deduce que el factor cósmico de escala toma valores en el intervalo  $a_{\min} \leq a < \infty$ , con

$$a_{\min} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\alpha)}} \quad (3.2.5)$$

y  $0 \leq \rho < A^{1/(1+\alpha)}$ . Así, en este modelo el factor cósmico de escala crece a partir de un valor mínimo hasta infinito, creciendo la densidad de energía con esta expansión tendiendo al valor  $A^{1/(1+\alpha)}$ .

A la vista de la Eq. (3.2.3) se puede notar que el comportamiento de este modelo tenderá al de un universo lleno con una constante cosmológica, aproximándose su

parámetro de Hubble al valor  $\sqrt{8\pi/3}A^{1/[2(1+\alpha)]}$ . De hecho, como fue mostrado en la Ref. [7], la Eq. (3.2.3) puede ser integrada analíticamente si  $\alpha > -1/2$ , obteniendo

$$t - t_0 = \frac{A^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}}{\sqrt{6\pi}(1+2\alpha)} \left( 1 - \left( \frac{a}{a_{\min}} \right)^{-3(1+\alpha)} \right)^{\frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}} \times \\ F \left( 1, \frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}; \frac{3+4\alpha}{2(1+\alpha)}; 1 - \left( \frac{a}{a_{\min}} \right)^{-3(1+\alpha)} \right) + C, \quad (3.2.6)$$

donde  $C$  es una constante y  $F(b, c; d; e)$  es una función hipergeométrica [145], también llamada serie hipergeométrica, que converge para cualquier valor de  $e$  tal que  $|e| \leq 1$  si  $b + c - d < 0$ , no converge para  $e = 1$  si  $0 \leq b + c - d < 1$ , y, si  $1 \leq b + c - d$ , diverge en  $|e| = 1$ . Por lo tanto, en este caso,  $b + c - d = 0$ , el intervalo de tiempo necesario para alcanzar un factor cósmico infinitamente grande, es decir  $e \rightarrow 1$ , será infinitamente grande. Aunque no se ha obtenido ninguna expresión analítica para  $-1 < \alpha \leq -1/2$ , el comportamiento de la solución para los otros valores de este parámetro, así como el argumento ya mencionado sobre la ecuación de Friedmann, nos hace sospechar que en este caso el comportamiento asintótico del modelo también debería ser similar al de un de Sitter. Por lo tanto, en el modelo PGCG 1, el universo se expandirá de forma acelerada durante toda la eternidad tendiendo la densidad de energía a un valor finito [7].

**PGCG 2.**  $A > 0$ ,  $B < 0$  y  $1 + \alpha < 0$ . Este caso, que ya había sido encontrado en [7; 146], fue considerado más seriamente en la Ref. [22].

Procediendo de forma similar a lo discutido en el caso anterior, podemos ver que el factor cósmico de escala en este modelo tomará valores en el intervalo  $0 \leq a \leq a_{\max}$ , con

$$a_{\max} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\alpha)}} \quad (3.2.7)$$

que toma la misma forma que el  $a_{\min}$  de la Eq. (3.2.5), creciendo la densidad de energía desde un valor igual a  $A^{1/(1+\alpha)}$  hasta hacerse infinitamente grande.

La Eq. (3.2.3) puede ser integrada desde  $t$  hasta  $t_{\max} = t(a = a_{\max})$  para obtener

$$t_{\max} - t = \frac{A^{-\frac{1}{2|1+\alpha|}}}{\sqrt{6\pi}(1+2\alpha)} \left[ 1 - \left( \frac{a}{a_{\max}} \right)^{-3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}} \times \\ F \left( 1, \frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}; \frac{3+4\alpha}{2(1+\alpha)}; 1 - \left( \frac{a}{a_{\max}} \right)^{-3(1+\alpha)} \right), \quad (3.2.8)$$

donde vuelve a aparecer una función hipergeométrica  $F(b, c; d; e)$  con el comportamiento ya mencionado, [145]. Así, el intervalo de tiempo necesario para que el factor cósmico de

escala alcance su valor máximo a partir de un valor no-nulo,  $e < 1$ , es finito. Se puede ver fácilmente que en este momento tanto la densidad de energía y presión del fluido como el parámetro de Hubble y su derivada temporal divergirán; es más, el escalar de curvatura en un modelo de GCG es

$$R = 12 \left( A + \frac{B}{4a^{3(1+\alpha)}} \right) \left( A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad (3.2.9)$$

que también diverge en un modelo PGCG 2 cuando  $a \rightarrow a_{\max}$ . Por lo tanto, este modelo alcanzará una singularidad en un intervalo de tiempo finito a un factor cósmico de escala finito y no nulo, en la que la densidad del fluido oscuro será inusualmente grande. Esta singularidad puede ser clasificada como una singularidad de tipo III en la notación de Ref. [147]<sup>9</sup>. De esta forma, un universo de este tipo se expandirá de forma acelerada encontrándose cada vez más lleno de energía fantasma hasta que su evolución se congele a un cierto tamaño característico,  $a_{\max}$ , finito en el que el universo estará infinitamente lleno de esta energía fantasma, con lo que nada podrá moverse durante toda la eternidad. Por esta razón, hemos llamado a este nuevo final cósmico “la gran congelación”, [21].

Aunque la presencia de esta singularidad en un futuro finito del universo en este modelo está fuera de toda duda por los argumentos presentados, ésta podría deducirse también a partir de una aproximación del comportamiento del factor cósmico de escala en las cercanías de dicha singularidad que toma una forma muy simple [21]

$$a \simeq a_{\max} \left\{ 1 - \left( \frac{2\pi}{3} \right)^{\frac{1+\alpha}{1+2\alpha}} \left[ \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \right]^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}} (3A|1+\alpha|)^{\frac{1}{1+2\alpha}} (t_{\max} - t)^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}} \right\}. \quad (3.2.10)$$

**PGCG 3 y 4.**  $A < 0$ ,  $B > 0$  y  $(1+\alpha)^{-1} = 2n$ . En ambos casos la discretización del parámetro  $\alpha$  proviene de que la consideración de  $A < 0$ ,  $B > 0$  y  $p + \rho < 0$ , implica  $\rho^{1+\alpha} < 0$ , con lo que una densidad de energía positiva,  $\rho > 0$ , sólo será posible si  $(1+\alpha)^{-1} = 2n$ .

El PGCG 3, con  $n > 0$  (PGCG 4, con  $n < 0$ ) tendrá una evolución futura similar al PGCG 1 (PGCG 2), es decir, será asintóticamente de Sitter (presentará una gran congelación en un futuro finito).

Por otro lado, aunque una descripción realista de la evolución en épocas tempranas del universo necesita la presencia de otras componentes que serán dominantes en dicho régimen, se puede ver que [22], si se quisiera estudiar este universo en épocas tempranas, la discretización del parámetro  $\alpha$  en el PGCG 3 evitaría ciertos problemas que podrían aparecer en el PGCG 1 (Véase el cuadro 3.1).

<sup>9</sup>Otros trabajos que incluyen clasificaciones de singularidades son, por ejemplo, Refs. [148; 149]

### 3.2.2. La consideración del dual no cambia el futuro.

Se puede plantear cual sería la evolución futura del universo si éste estuviera descrito por una brana llena de un gas de Chaplygin fantasma dual<sup>10</sup> (DGCG), siendo éste un fluido que cumple la ecuación de estado (3.2.1) con  $w < -1$  que satisface la condición de energía nula, ya que el dual nos proporciona una alternativa a los modelos de energía oscura en teorías en las que las ecuaciones de Friedmann están modificadas y que, por lo tanto, permiten la consideración de una densidad de energía negativa manteniendo un parámetro de Hubble lorentziano.

En particular, si consideramos un modelo inspirado en el de Randall-Sundrum tipo 1 [20], las ecuaciones de Friedmann quedan modificadas de la forma que ya fue presentada en la sección anterior, Eqs.(3.1.1) y (3.1.2). Estas pueden escribirse como

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right), \quad (3.2.11)$$

y

$$\dot{H} = -4\pi(p + \rho) \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) > 0, \quad (3.2.12)$$

donde  $\lambda > 0$  es la tensión de la brana, la densidad de energía viene dada por  $\rho < -2\lambda$  para tener un parámetro de Hubble bien definido y hemos re-escrito la Eq.(3.1.2) de tal forma que evidencie que  $\dot{H} > 0$  aunque  $p + \rho > 0$ , es decir, que la expansión es mayor que la producida por una constante cosmológica a pesar de que el fluido cumple la condición de energía nula.

Recordando las expresiones (3.2.1) y (3.2.2), podemos ver que habrá una familia de soluciones duales, es decir, que cumplen las condiciones: (i)  $\rho < 0$  y (ii)  $p + \rho > 0$ . Éstas se caracterizan por  $A < 0$ ,  $B > 0$  y

$$1 + \alpha = \frac{1 + 2(m + n)}{1 + 2n} \quad (3.2.13)$$

donde  $m$  y  $n$  son números enteros estando, por lo tanto, el parámetro  $\alpha$  discretizado en todos los casos<sup>11</sup>. Así, se pueden cumplir las condiciones (i) y (ii) ya que

$$\rho - \left(|A| - \frac{B}{a^{3\frac{1+2(m+n)}{1+2n}}}\right)^{\frac{1+2n}{1+2(m+n)}} < 0, \quad \text{con } -|A| + \frac{B}{a^{3\frac{1+2(m+n)}{1+2n}}} < 0, \quad (3.2.14)$$

y

$$p = |A| \left(|A| - \frac{B}{a^{3\frac{1+2(m+n)}{1+2n}}}\right)^{-\frac{2m}{1+2(m+n)}}. \quad (3.2.15)$$

<sup>10</sup>Donde con fluido dual nos referimos al introducido en la sección anterior, [19], que no tiene nada que ver con el utilizado en la Ref. [138]

<sup>11</sup>Debemos recordar que otra discretización ya aparecía en dos tipos de PGCG, presentados en la subsección anterior.



De esta familia, estudiaremos el caso particular  $m = -n$  que produce tres tipos diferentes de DPGCG, que son [22]:

1.  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $1 + \alpha > 0$  y  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1$ , con  $n$  un entero positivo,
2.  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $1 + \alpha < 0$ ,  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1$ , con  $n$  un entero negativo, y  $|A|^{1/(1+\alpha)} < 2\lambda$ ,
3.  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $1 + \alpha < 0$ ,  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1$ , con  $n$  un entero negativo, y  $2\lambda \leq |A|^{1/(1+\alpha)}$ .

**DPGCG 1**  $A < 0$ ,  $B > 0$  y  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1 > 0$ .

A primera vista, a través las expresiones (3.2.1) y (3.2.2) podría parecer que el factor cósmico de escala de la brana crece desde el valor  $a_{\min}$  hasta  $\infty$  mientras que la densidad de energía decrece desde 0 hasta  $-|A|^{1+2n}$  pero, recordando que en el presente escenario<sup>12</sup>  $\rho \leq -2\lambda$ , el valor mínimo que podrá tomar dicho factor de escala es

$$a_{\lambda_1} = a_{\min} \left[ 1 - (2\lambda)^{\frac{1}{1+2n}} |A|^{-1} \right]^{-\frac{1+2n}{3}}, \quad (3.2.16)$$

que corresponde a  $\rho = -2\lambda$  y  $H = 0$ , con  $a_{\min}$  definido en la Eq. (3.2.5). Se debe destacar que, para que pueda existir este modelo, la tensión de la brana debe ser tal que  $\lambda < |A|^{1+2n}/2$ .

Ya que  $\dot{H} > 0$ , la evolución futura de este modelo, a la vista de la Eq. (3.2.11), será una expansión super-acelerada hasta que el parámetro de Hubble se aproxime a su valor máximo  $H_{\lim}$

$$H_{\lim} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} |A|^{1+2n} \left( -1 + \frac{|A|^{1+2n}}{2\lambda} \right)}, \quad (3.2.17)$$

mientras que la densidad de energía tiende a su valor mínimo  $-|A|^{1+2n}$ , para factores de escala suficientemente grandes. Por lo tanto, la evolución futura de la brana será asintóticamente de Sitter por ser la densidad de energía efectiva en la brana positiva, a pesar de que la densidad de energía es negativa e imita en dicho régimen a una constante cosmológica negativa.

Debemos destacar que estos comentarios se refieren a la fase de expansión de la brana aunque, al menos en principio, podría existir una fase de contracción anterior a

---

<sup>12</sup>Esta cota máxima para la densidad de energía fantasma dual se vería modificada en un modelo más realista en el consideráramos la presencia de materia y radiación, por lo que tendremos en cuenta que el presente modelo sería una buena aproximación para valores del factor cósmico de escala suficientemente grandes ya que, en este régimen, las componentes adicionales mencionadas decaerían rápidamente.

ésta. A falta de una expresión analítica para  $a(t)$  que confirme o descarte este hecho, podemos aproximar el comportamiento del factor de escala para valores cercanos a  $a_{\lambda_1}$  mediante

$$a \simeq a_{\lambda_1} \left\{ 1 + 2\pi(2\lambda)^{\frac{2n}{1+2n}} |A| \left[ 1 - (2\lambda)^{\frac{1}{1+2n}} |A|^{-1} \right] (t - t_{\lambda_1})^2 \right\}, \quad (3.2.18)$$

que puede ser obtenida considerando los dos posibles signos de  $H$  y que evidencia que el mínimo puede ser alcanzado en un intervalo finito de tiempo. Ya que en  $t_{\lambda_1}$  tenemos  $\dot{a} = 0$  ( $H^2 = 0$ ) y  $\ddot{a} > 0$  ( $\dot{H} > 0$ ), nos aseguramos de que este punto será un mínimo de  $a(t)$ .

**DPGCG 2.**  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1 < 0$  y  $|A|^{1/(1+\alpha)} < 2\lambda$ .

En este modelo el factor cósmico de escala toma valores en el intervalo  $a_{\lambda_2} \leq a < a_{\max}$ , donde  $a_{\max}$  fue definido en la Eq. (3.2.7) y

$$a_{\lambda_2} = a_{\max} \left[ 1 - (2\lambda)^{\frac{1}{1+2n}} |A|^{-1} \right]^{-\frac{1+2n}{3}}, \quad (3.2.19)$$

corresponde a  $\rho = -2\lambda$ . A partir de este valor la densidad de energía comienza a decrecer haciéndose infinitamente pequeña.

Por otro lado, el parámetro de Hubble crece tan rápido que la brana alcanza una gran congelación en  $a_{\max}$ , cerca del cual la evolución del factor cósmico de escala puede ser aproximada mediante

$$a(t) \simeq a_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{16\pi}{3\lambda} \right)^{-\frac{1}{4n}} |A|^{-\frac{1+2n}{2n}} |n|^{-\frac{1}{2n}} \left( \frac{|1+2n|}{3} \right)^{\frac{1+2n}{2n}} (t_{\max} - t)^{-\frac{1}{2n}} \right]. \quad (3.2.20)$$

Por lo tanto, la gran congelación será alcanzada en un intervalo de tiempo finito. Aun más, el crecimiento del parámetro de Hubble en este régimen para un parámetro  $\alpha$  dado es mayor que el que se obtenía en los casos 4-dimensionales PGC 2 y 4, con lo que divergirá con un exponente mayor haciendo que la singularidad se alcance de forma más abrupta. Se debe destacar que, la gran congelación que sufre la brana a un tiempo futuro finito, evidencia el hecho de que el cumplimiento de la condición de energía nula no evita dicha singularidad al igual que sucediera con la energía fantasma dual en la sección anterior.

Por otra parte, si hubiéramos considerado una posible fase de contracción de la brana, necesariamente anterior a la de expansión ya que  $\dot{H} > 0$ , podríamos haber integrado de forma aproximada la Eq. (3.2.11) y, dada la discretización de  $\alpha$ , habríamos obtenido<sup>13</sup> un  $t_m - t < 0$ , con lo que parecería posible que la gran congelación se

<sup>13</sup>Se debe notar que tanto aquí como en el caso anterior descartamos uno de los signos de una raíz que aparece en el proceso y que implicaría  $a(t) > a_{\max}$ , ya que esa solución no tiene sentido físico en las presentes condiciones.

duplicase, como ocurría en la sección anterior, al considerar DPGCG. Para comprobar que esta fase de contracción podría tener lugar, al menos en principio, debemos estudiar si el intervalo de tiempo necesario para alcanzar el tamaño mínimo es finito. Así, cerca de  $a_{\lambda_2}$

$$a(t) \simeq a_{\lambda_2} \left\{ 1 + 2\pi(2\lambda)^{\frac{2n}{1+2n}} |A| \left[ 1 - |A|^{-1} (2\lambda)^{\frac{1}{1+2n}} \right] (t - t_{\lambda_2})^2 \right\}, \quad (3.2.21)$$

que evidencia que el tiempo necesario para alcanzar el valor mínimo en la posible rama decreciente, o para que evolucione desde el valor mínimo en la creciente, es finito en ambos casos; de hecho, si hubiéramos considerado la rama negativa de la ecuación (3.2.11) habríamos obtenido el mismo resultado. Al igual que sucediera en el caso del DPGCG 1,  $a_{\lambda_2}$  correspondería a un mínimo de  $a(t)$ , pasando el universo de una fase de contracción a otra de expansión en  $t_{\lambda_2}$ .

Por lo tanto, como en la subsección 3.1.1 con la energía dual con un parámetro de la ecuación de estado constante, la consideración del fluido dual en un escenario de Randall-Sundrum tipo 1 parece duplicar las singularidades del modelo. Sin embargo, una solución analítica sería necesaria para confirmar este hecho sin ningún género de dudas.

**DPGCG 3.**  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $(1 + \alpha)^{-1} = 2n + 1 < 0$  y  $2\lambda \leq |A|^{1/(1+\alpha)}$ .

La evolución de este modelo cuando el factor cósmico de escala está cerca del valor máximo será igual que en el caso anterior; sin embargo, su comportamiento puede diferir del DPGCG 2 en el rango en el que el factor de escala esté cerca de su valor mínimo. De hecho, en este caso la tensión de la brana no excluye ningún valor de  $a(t)$  que resulta estar por tanto comprendido en el intervalo  $0 \leq a < a_{\max}$ , ya que la escala de energía establecida por la tensión de la brana es tan pequeña que no implicaría ningún corte en  $\rho$ .

Si  $2\lambda < |A|^{1/(1+\alpha)}$ , la evolución de la brana para valores del factor de escala suficientemente pequeños, puede ser aproximada por

$$a \simeq a_0 \exp(H_{\lim}(t - t_0)), \quad (3.2.22)$$

con  $H_{\lim}$  definido en la expresión (3.2.17) y  $a_0$  un factor de escala suficientemente pequeño. Así, el tiempo necesario para evolucionar desde el valor mínimo del factor de escala es infinitamente grande. Por otro lado, si  $2\lambda = |A|^{1/(1+\alpha)}$ , se tiene

$$a \simeq a_{\max} \left[ \left( \frac{a_0}{a_{\max}} \right)^{\frac{3}{2(1+2n)}} - \frac{\sqrt{4\pi\lambda}}{|2n+1|} (t - t_0) \right]^{\frac{2(1+2n)}{3}}, \quad (3.2.23)$$

A,B	$1 + \alpha$	$a$	$\rho$	Pasado	Futuro
$A > 0$	positivo	$a_{\min} \leq a < \infty$	$0 \leq \rho \leq A^{\frac{1}{1+\alpha}}$	(1) Pasado infinito	de Sitter
				(2) singularidad tipo IV	
				(3) singularidad repentina	
$B < 0$	negativo	$0 \leq a < a_{\max}$	$A^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \rho < \infty$	de Sitter/pasado infinito	gran congelación
$A < 0$	$(2n)^{-1} > 0$	$a_{\min} \leq a < \infty$	$0 \leq \rho \leq  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	potencias/pasado infinito	de Sitter
$B > 0$	$(2n)^{-1} < 0$	$0 \leq a < a_{\max}$	$ A ^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \rho < \infty$	de Sitter/pasado infinito	gran congelación

Cuadro 3.1: Esta tabla resume el comportamiento asintótico de un universo lleno de energía oscura siendo ésta PGCG. Los comportamientos asintóticos en el pasado etiquetados con los números (1) y (3) corresponden, respectivamente, a  $-1 < \alpha \leq -1/2$  y  $0 < \alpha$ . La etiqueta (2) corresponde a  $-1/2 < \alpha < 0$ , en el caso que  $\alpha$  no se pueda expresar como  $\alpha = 1/(2p) - 1/2$ , con  $p$  un entero positivo; en este caso,  $-1/2 < \alpha < 0$ ,  $\alpha$  podría escribirse como  $\alpha = 1/(2p) - 1/2$ , con  $p$  un entero positivo, no habría ninguna singularidad en el pasado y el universo habría nacido hace un intervalo de tiempo finito. Por otro lado, con singularidad de tipo IV nos referimos a la notación de la Ref. [147].

así, aunque en este caso la evolución sería más como cierta inflación en serie de potencias, el tiempo necesario para evolucionar desde el factor de escala mínimo seguiría siendo infinito. Por lo tanto, en ambos casos, aunque la posibilidad de una fase de contracción de la brana no puede ser excluida, ésta no se conectaría con la fase de expansión mediante un intervalo de tiempo finito.

### 3.2.3. Otras consideraciones.

Todos los modelos presentados en los que se considera que la energía oscura tiene una ecuación de estado dada por la Eq. (3.2.1), podrían describir las fases actual y futura de nuestro Universo, aunque un modelo realista debería considerar también la presencia de otras componentes, que esperamos modifiquen su evolución a factores de escala pequeños. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, podría resultar interesante considerar también el comportamiento de los modelos presentados en las secciones precedentes en el pasado<sup>14</sup>, cuadros 3.1 y 3.2.

En lo relativo a los modelos de PGCG, cuadro 3.1, debemos destacar que mientras que el modelo PGCG 1 podría presentar comportamientos singulares en el pasado para ciertos valores del parámetro  $\alpha$ , este tipo de comportamientos serían evitados en el PGCG 3 gracias a la discretización de dicho parámetro, resultando un modelo temporalmente infinito en el pasado que podría sugerir algún tipo de inflación en serie de potencias. Así, si por alguna razón otras componentes materiales no dominasen la evolución de estos modelos a tiempos tempranos y excluyéramos los comportamientos

<sup>14</sup>Los casos cuya evolución en el pasado no ha sido estudiada en las secciones precedentes, pueden ser tratados en este régimen de forma similar a los casos de DPCGC presentados. El lector interesado puede consultar la Ref.[22].

A,B	$1 + \alpha$	$\lambda$	$a$	$\rho$	Pasado	Futuro
$A < 0$	$(1 + 2n)^{-1} > 0$	$2\lambda <  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$a_{\lambda_1} \leq a < \infty$	$2\lambda \leq  \rho  \leq  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	(1) finito	de Sitter
$B > 0$	$(1 + 2n)^{-1} < 0$	$2\lambda <  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$0 \leq a < a_{\max}$	$ A ^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq  \rho  < \infty$	de Sitter	gran congelación
		$2\lambda =  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$0 \leq a < a_{\max}$	$ A ^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq  \rho  < \infty$	potencias	gran congelación
		$2\lambda >  A ^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$a_{\lambda_2} < a < a_{\max}$	$2\lambda \leq  \rho  < \infty$	(2) finito	gran congelación

Cuadro 3.2: En esta tabla se resumen los resultados presentados sobre el comportamiento de los modelos que pueden ser obtenidos al considerar diferentes tipos de DPGCG. Debemos clarificar que con “pasado” nos referimos al estudio hacia el tamaño mínimo aunque no excluimos una posible fase de contracción previa a la de expansión en la que nos encontramos. En el caso etiquetado como (1), aunque la evolución desde un factor de escala mínimo sería finita, la evolución total hacia el pasado sería infinita de existir la fase de contracción previa que se iniciaría desde un comportamiento asintótico de Sitter. En el caso (2) la fase previa de contracción se iniciaría en una gran congelación, haciendo que el modelo tenga una vida total finita.

singulares mencionados del PGCG 1, tales modelos podrían describir un inicio inflacionario de tipo de Sitter, 2 y 4, o serie de potencias, 1 y 3.

El comportamiento de los distintos tipos de DPGCG en el pasado, cuadro 3.2, evidencia que en los casos en los que la tensión de la brana introduzca una densidad de energía máxima, mínima en valor absoluto, el universo tendría un comportamiento suave, creciendo desde el valor del factor cósmico de escala mínimo en un tiempo finito. En los casos en los que no aparece esta energía de corte, el intervalo temporal hacia el pasado se hace infinito con una evolución tipo de Sitter o serie de potencias, similarmente a como ocurre en los PGCG.

Por otro lado, se podría pensar que las singularidades que aparecen en los modelos estudiados, en particular la gran congelación, podrían ser consecuencia del uso de un fluido fantasma dual o fantasma que necesariamente violan, al menos, la condición de energía débil. Sin embargo, se puede ver que incluso ciertos tipos de GCG que cumplieren dicha condición de energía podrían implicar la aparición de singularidades en modelos llenos de ellos, aunque cerca de la singularidad correspondiente la condición de energía dominante sería violada ya que se llegaría a tener  $\rho < p$ . Estos casos, que pueden ser estudiados de forma similar a los ya tratados en esta sección, se suman en el cuadro (3.3). Una visión conjunta de los cuadros (3.1) y (3.3) nos muestra un hecho curioso, ya que parece que el comportamiento de los GCG incluidos en (3.3) sería el temporalmente invertido de los PGCG mostrados en el cuadro (3.1) cambiando “tipo polvo” por “de Sitter”, es decir, teniendo en cuenta el mejor comportamiento posible del fluido considerado en cada caso. Esta coincidencia podría sugerir que el GCG ordinario yendo “hacia atrás” en el tiempo presentaría en algunos casos los fenómenos singulares de su compañero fantasma, donde nos referimos a compañero fantasma al PGCG con el mismo signo de  $1 + \alpha$  y distinto signo de  $A$  y  $B$ ; mientras que en los casos que dicho compañero fantasma tuviera un comportamiento asintótico suave, el

A,B	$1 + \alpha$	$a$	$\rho$	Pasado	Futuro
$A < 0$	positivo	$0 \leq a < a_{\max}$	$0 \leq \rho < \infty$	tipo polvo	(1) futuro infinito
					(2) singularidad tipo IV
					(3) singularidad repentina
$B > 0$	negativo	$a_{\min} \leq a < \infty$	$0 \leq \rho < \infty$	gran congelación	tipo polvo
$A > 0$	$(2n)^{-1} > 0$	$0 \leq a < a_{\max}$	$0 \leq \rho < \infty$	tipo polvo	futuro infinito
$B < 0$	$(2n)^{-1} < 0$	$a_{\min} \leq a < \infty$	$0 \leq \rho < \infty$	gran congelación	tipo polvo

Cuadro 3.3: Esta tabla resume los comportamientos asintóticos de ciertos modelos de GCG estudiados en la Ref.[22]. Los comportamientos futuros etiquetados como (1) y (3) corresponden a  $-1 < \alpha \leq -1/2$  y  $0 < \alpha$ , respectivamente. (2) corresponde a  $-1/2 < \alpha < 0$ , en el caso en el que el parámetro  $\alpha$  no pueda ser expresado como  $\alpha = 1/(2p) - 1/2$ , con  $p$  un entero positivo; aunque si  $\alpha$  pudiera ser escrito de esta forma, no habría singularidad futura y el universo alcanzaría su tamaño máximo en un intervalo de tiempo finito.

GCG correspondiente también lo presentaría, aunque en el caso del GCG ordinario el comportamiento suave sería distinto del que aparece en PGCG.

### 3.2.4. ¿Podemos escapar de la gran congelación?

El gran viaje que podría emprender el universo en modelos fantasma [13] evitaría que los habitantes de un universo de este tipo pudieran acabar necesariamente desgarrándose si el modelo así lo requiriese. En el caso de que la descripción de la energía oscura mediante un PGCG pudiera evitar un final cósmico este fenómeno ya no parecería necesario, de hecho los habitantes de ese universo podrían preferir una tranquila muerte térmica futura ante la incertidumbre de un posible viaje a un universo desconocido. Así, Jiménez Madrid, [127], estudió la posible aparición de dicho fenómeno en un modelo particular de PGCG con un comportamiento asintótico similar a un de Sitter, en particular el que hemos nombrado PGCG 1. En este caso, los agujeros de gusano tenderían a un valor máximo finito que, salvo ciertas excepciones debidas a valores particulares de los parámetros, no sería mayor que el tamaño del universo observable, con lo que no habría ningún gran viaje y, al ser el tamaño de estos agujeros macroscópico, estarían sujetos a la conjetura del censor cósmico, [102], al no llegar a tener un tamaño excesivo capaz de evitarlo, [120], como ya mencionamos en la subsección 2.2.1.

Nótese que, si la energía oscura estuviera descrita por otros tipos de PGCG, en particular PGCG 2 y 4, podría tener lugar en el futuro un final cósmico distinto, en el que la evolución del universo se viera congelada al estar totalmente lleno de energía fantasma. Cabría preguntarse si dicho final cósmico podría evitarse mediante un gran viaje del universo. Como hemos comentado en la sección 2.2.1 del capítulo anterior, a la vista de la Eq. (2.1.25), esto sería precisamente lo que sucedería, ya que la masa del agujero de gusano divergiría en un tiempo finito anterior a la singularidad siempre que el modelo muestre una singularidad futura que pueda ser caracterizada

por la divergencia del parámetro de Hubble, como es el caso. Así, la gran congelación sería evitada al menos cuando esta aparezca en modelos 4-dimensionales homogéneos e isótropos, [16].

Por otro lado, como hemos visto en la sección anterior, la consideración de la acreción de energía oscura por objetos astronómicos puede depararnos sorpresas cuando consideramos modelos de dimensión mayor en los que nuestro universo está descrito por una brana en su interior. Para ver si esto realmente ocurre, consideramos los modelos DPGCG 2 y 3. Teniendo en cuenta (3.2.2) y (3.2.5), expresamos la suma de la densidad de energía más la presión en estos modelos como

$$p + \rho = \frac{x^{\frac{3}{1+2p}}}{|A|^{1+2p} \left(1 - x^{\frac{3}{1+2p}}\right)^{2(1+p)}} \quad (3.2.24)$$

donde, para ver de una forma más directa el comportamiento, hemos llamado  $1 + 2p = -(1 + 2n) > 0$  y  $x = a/a_{\max}$  con, por lo tanto  $x_{\lambda_2} \leq x \leq 1$  o  $0 \leq x \leq 1$ , respectivamente. A partir de (3.2.1) y (3.2.11) podemos obtener

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} x \frac{\left[1 - 2\lambda|A|^{1+2p} \left(1 - x^{\frac{3}{1+2p}}\right)^{1+2p}\right]^{1/2}}{\sqrt{2\lambda}|A|^{1+2p} \left(1 - x^{\frac{3}{1+2p}}\right)^{1+2p}}, \quad (3.2.25)$$

donde hemos considerado la fase en expansión. Introduciendo la Eq. (3.2.25) en la Eq. (3.2.24), podemos integrar la Eq. (2.2.20) para obtener

$$m(x) = \frac{m_0}{1 - 4Qm_0\sqrt{\frac{\pi\lambda}{3}} \left\{ \ln \left[ \frac{z(x)}{2(1+\sqrt{1-z^2(x)})} \right] - \ln \left[ \frac{z_0}{2(1+\sqrt{1-z_0^2})} \right] \right\}}, \quad (3.2.26)$$

donde  $z(x) = \sqrt{2\lambda}|A|^{\frac{1+2p}{2}} \left(1 - x^{\frac{3}{1+2p}}\right)^{\frac{1+2p}{2}}$  y, por lo tanto, es una función decreciente de  $x$  que cubrirá el intervalo  $[0, z_*]$  con  $z_* < 1$ . Se puede ver que el logaritmo será una función negativa y creciente de  $z$  en el intervalo considerado, por lo que su valor absoluto será una función positiva y creciente de  $x$ . De esta forma, el denominador de la expresión (3.2.26) será una cantidad cada vez mayor haciendo que  $m(x)$  tienda a cero en el límite  $x \rightarrow 1$ . Por lo tanto, en este caso, los agujeros de gusano desaparecerán en la gran congelación si no lo han hecho antes debido a sus inestabilidades cuánticas.

Por otro lado, si estudiamos la evolución de los agujeros negros en este escenario considerando la Eq. (2.1.22), obtendremos una expresión similar dada por

$$M(x) = \frac{M_0}{1 + 4AM_0\sqrt{\frac{\pi\lambda}{3}} \left\{ \ln \left[ \frac{z(x)}{2(1+\sqrt{1-z^2(x)})} \right] - \ln \left[ \frac{z_0}{2(1+\sqrt{1-z_0^2})} \right] \right\}}, \quad (3.2.27)$$

donde ahora aparece el signo cambiado. Por lo tanto, y ya que el logaritmo es negativo y su valor absoluto toma valores pertenecientes al intervalo considerado, existirá un cierto valor de  $x$ ,  $x_*$ , tal que  $x_0 < x_* < 1$  para el que el denominador se anule haciendo divergir la masa del agujero negro, de forma tal que existirá un momento anterior en el que el agujero negro llegue a ser mayor que el universo que mantiene en todo momento un  $a$  finito. Por lo tanto, en este modelo la gran congelación podría ser evitada aunque por un fenómeno no necesariamente más agradable, el universo sería tragado por un agujero negro y, a falta de poder combinar a éste con otro objeto infinitamente grande, su destino sería incierto, [16]. Es preciso señalar aquí que en la Ref. [16] donde se presentaron estos cálculos, había un error en el argumento de los logaritmos que aparecen en los denominadores. Sin embargo, las conclusiones que se obtenían de dichas fórmulas eran correctas.

Finalmente, debemos destacar que si hubiéramos intentando estudiar este proceso de forma aproximada, podríamos haber considerado los parámetros efectivos que pueden ser definidos en este escenario. Si este hubiera sido nuestro procedimiento, habríamos tratado el modelo como si fuera 4-dimensional, utilizando por lo tanto las Eqs. (2.1.24) y (2.2.21), concluyendo que los agujeros negros desaparecerían en la singularidad y que, antes de ella, los agujeros de gusano tendrían un tamaño infinitamente grande. Por lo tanto, una aproximación de este tipo no sólo podría llevarnos a obtener resultados que se diferenciases de los físicamente consistentes obtenidos anteriormente, sino que serían opuestos.

### 3.3. Un universo de tantos.

Tal vez decir que nuestro universo es único sea una afirmación similar a la que existe sólo un sol o una galaxia. Por supuesto, que estas dos últimas afirmaciones son totalmente falsas está fuera de toda duda, ya que podemos observar que nuestro planeta gira en torno al sol formando junto a otros planetas un sistema solar entre otros tantos que componen nuestra galaxia que, a su vez, no parece ser muy diferente al resto de galaxias que se observan. Las mejoras tecnológicas han hecho posible observar toda esta inmensidad, pero sin un cambio de concepción previo puede que la historia hubiera sido diferente.

Así, podríamos pensar que el paso siguiente a esta pérdida de privilegios del lugar que ocupa el hombre en la naturaleza, debería ser considerar que nuestro Universo podría ser simplemente uno de muchos otros que existieran en un marco de multiverso. De hecho, esta idea no suena tan descabellada hoy en día debido a la gran cantidad de multiversos que ya han sido considerados en distintas ramas de la física teórica,



como en la mecánica cuántica, [150], en la teoría de cuerdas [151] o en el esquema inflacionario [152].

Por otro lado, la física de partículas y la cosmología parecen ser totalmente irreconciliables en la actualidad [153]. En particular podemos destacar el problema de la constante cosmológica [154], que señala como el valor de dicha constante predicho de la densidad de vacío cuántica es muchos órdenes de magnitud superior al considerado en cosmología, la ruptura de la simetría temporal en cosmología [155], la cual está presente en la física de partículas y desaparece al existir una flecha del tiempo intrínseca, o la existencia de un horizonte en la cosmología acelerada que es matemática y físicamente incompatible con cualquier teoría fundamental que requiera la consideración de propagación entre puntos infinitamente separados [156; 157; 158; 159]. Estos problemas podrían ser interpretados como la necesidad de un cambio de paradigma que probablemente vendría producido por una concepción distinta o más amplia de la física que conocemos.

Siguiendo esta línea de pensamiento, en esta sección estudiaremos un modelo particular compatible con un universo acelerado y con cierta motivación proveniente de la física de partículas al contener una constante cosmológica negativa. Aunque, obviamente, no pretendemos en ningún caso que nuestro estudio conlleve el cambio de paradigma necesario mencionado, sí mostraremos como un análisis que no suponga la restricción previa a un esquema preconcebido podría depararnos una grata sorpresa al no presentar los problemas indicados, aunque partamos de un modelo simple. De hecho este modelo presentará infinitas singularidades haciendo que pueda ser interpretado como un multiverso clásico, siendo precisamente este esquema el que nos lleve a sugerir que los problemas anteriormente mencionados serían inevitables si uno considera la definición de la física de partículas y la cosmología en su universo, mientras que podrían no aparecer al considerar que la física fundamental vive en el multiverso (o en uno de los universos finitos que lo componen) debiendo estar descrita la cosmología que observamos en un único universo temporalmente infinito y aislado de los demás aunque relacionado con las características del multiverso.

Esta idea del multiverso y su relación con la física de nuestro universo nos recuerda al mito de la cueva de Platón, en el que se considera a un grupo de humanos atados en una cueva de espaldas a la entrada con una hoguera entre ellos y dicha entrada, estando por tanto condenados a ver las sombras del mundo exterior. Este mito, que fue formulado por Platón para explicar la relación entre el mundo sensible, que percibimos, y el mundo de las ideas, el real, podría ser adaptado, dejando aparte las consideraciones metafísicas, de tal forma que en el mundo exterior se encontrara la naturaleza real que nosotros sólo podemos medir por sus sombras. Así, el mundo real jugaría el papel

del multiverso donde la física de partículas podría estar bien definida, mientras que nuestras experiencias y la cosmología, se referirían a las sombras proyectadas desde el exterior. De esta forma, las inconsistencias que podría aparecer entre la física de partículas y la cosmología serían debidas simplemente a intentar identificar el mundo de las sombras con el mundo real.

En esta sección, estudiaremos un modelo particular de energía oscura cuyas características nos llevarán a la consideración de un multiverso clásico [23] (subsección 3.3.1), mostrando la forma en la que podemos aislar uno de los universos que lo componen llegando a identificarlo con nuestro universo [24] (subsección 3.3.2). Finalmente, en la subsección 3.3.3, mostraremos unas consideraciones simples que nos llevarán a proponer la conjetura mencionada, es decir, que la interpretación de nuestro universo, referido a un tiempo cósmico infinito, como uno de los que forman el multiverso, nos podría ayudar a reconciliar ciertos aspectos de la física de partículas con la cosmología [24].

### 3.3.1. El multiverso oscuro.

Como ya hemos mencionado, consideramos un modelo cosmológico con la contribución de una constante cosmológica negativa. Obviamente, para poder definir un parámetro de Hubble lorentziano, este modelo deberá contener al menos otra sustancia que, en este caso, será la energía oscura. Así, este modelo se podrá entender como un universo lleno sólo con su energía de vacío, estando ésta formada por una componente constante negativa,  $\Lambda < 0$ , y otra dinámica, con un parámetro  $w$  constante, implicando  $\rho = \rho_0 (a(t)/a_0)^{-3(1+w)}$ .

La dinámica de un universo FLRW lleno con dicha sustancia viene dada por, [23]

$$H^2 = -\lambda + \frac{8\pi}{3} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}, \quad (3.3.1)$$

con  $\lambda = |\Lambda|/3 < 8\pi\rho_0/3$ , para tener un  $H_0$  real. Integrando la Eq. (3.3.1) podemos obtener

$$a(t) = a_0 \left[ \cos \left( \frac{3(1+w)}{2} \sqrt{\lambda}(t-t_0) \right) + b \sin \left( \frac{3(1+w)}{2} \sqrt{\lambda}(t-t_0) \right) \right]^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (3.3.2)$$

donde hemos definido  $b = \left( \frac{8\pi}{3\lambda}\rho_0 - 1 \right)^{1/2}$ . A la vista de la Eq. (3.3.2) podemos notar que para tener un factor de escala bien definido en todas partes, es decir para que este sea positivo, debemos requerir que su exponente sea un número par, positivo si  $w > -1$  y negativo si  $w < -1$ , discretizando el parámetro de la ecuación de estado en la forma

$$1 + w = \frac{1}{3(m+1)}, \quad \text{con } m = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots + \infty, \quad (3.3.3)$$

como ya sucediera en la subsección 3.1.1, [19], y en la Ref. [136], aunque con una expresión distinta.

En el caso en el que la energía oscura sea energía fantasma,  $w < -1$  ( $m < -1$ ), podemos re-escribir el factor cósmico de escala como

$$a(t) = a_0 [\cos(\alpha(t - t_0)) - b \sin(\alpha(t - t_0))]^{-\frac{2}{3|1+w|}}, \quad (3.3.4)$$

con  $\alpha = 3|1+w|\sqrt{\lambda}/2 > 0$ . Es fácil constatar que este factor de escala diverge un número infinito de veces en  $t \in (-\infty, \infty)$  y que cada una de esas divergencias corresponde con una singularidad desgarrada, teniendo lugar a un tiempo

$$t_{\text{br}_n} = t_0 + \frac{2}{3|1+w|\sqrt{\lambda}} \arctg \left[ \left( \frac{8\pi\rho_0}{3\lambda} - 1 \right)^{-1/2} \right] + \frac{2n\pi}{3|1+w|\sqrt{\lambda}}, \quad (3.3.5)$$

con  $n$  un entero. Se puede ver que si consideramos  $n = 0$  y expandimos (3.3.5) para  $\lambda \ll 1$  recuperamos, consistentemente, el tiempo necesario para alcanzar un gran desgarro en un universo fantasma con  $w$  constante y sin constante cosmológica, que incluimos como la Eq. (2.1.10) del capítulo anterior y es

$$t_{\text{br}} = t_0 + \frac{1}{|1+w|\sqrt{6\pi\rho_0}}. \quad (3.3.6)$$

El hecho de que en este modelo haya un gran desgarro un número infinito de veces puede ser interpretado considerando que, clásicamente, una singularidad corta el espaciotiempo, estando por lo tanto nuestro modelo dividido en infinitas regiones aisladas<sup>15</sup> unas de otras que empiezan y finalizan su evolución en una singularidad de este tipo. Así, cada región correspondería a un universo distinto independiente del resto, es decir, otro espaciotiempo, haciendo que la consideración de un tiempo común a los distintos universos de  $-\infty$  a  $\infty$  deje de tener sentido, ya que diferentes espaciotiempos no pueden ser “ordenados” en una misma línea temporal. Por otro lado, a la vista de la Eq. (3.3.4), podemos pensar que todos estos universos independientes serán idénticos entre sí y tendrán las mismas características físicas, iniciando su evolución en un gran desgarro y contrayéndose hasta un factor de escala mínimo

$$a_{\text{min}} = a_0 \left( \frac{8\pi\rho_0}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}} > 0, \quad (3.3.7)$$

---

<sup>15</sup>Más adelante, en la subsección 3.3.3, estudiaremos la posible conexión de estas regiones mediante construcciones como las mencionadas en la subsección 3.1.3. Si bien dicho estudio no conllevará ninguna consideración cuántica, debemos recordar que para que existan los agujeros de gusano debe existir una sustancia con propiedades difíciles de entender clásicamente, como por ejemplo la energía fantasma, [29].

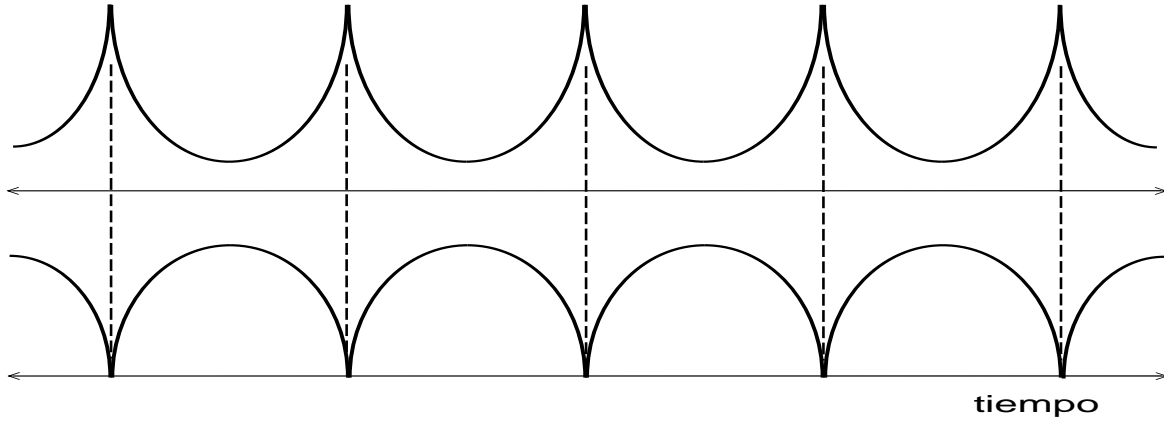


Figura 3.4: Arriba (abajo) representamos la evolución temporal del factor cósmico de escala correspondiente a un universo con una constante cosmológica negativa y energía fantasma (energía oscura con  $w > -1$ ).

a partir del cual comienza una expansión tan acelerada que hará al universo alcanzar otro gran desgarrado (véase la Fig. (3.4)). El tiempo de vida de cada uno de estos universos es

$$t_u = \frac{2\pi}{3|1+w|\sqrt{\lambda}}, \quad (3.3.8)$$

por lo que cuanto menor sea el valor de  $\lambda$  mayor será el tiempo de vida del universo  $t_u$ , con  $t_u \rightarrow \infty$  para  $\lambda \rightarrow 0$  que corresponde al modelo fantasma sin constante cosmológica en el que sólo hay un gran desgarrado.

Ya que, como hemos mencionado, las infinitas singularidades cortan el espaciotiempo generando infinitos espaciotiempos causalmente desconexos, podemos re-escalar y re-definir el tiempo en cada uno de esos espaciotiempos de una forma independiente a los demás. Así, para un espaciotiempo dado, podemos obtener un factor de escala que alcance su mínimo en el nuevo cero del tiempo al considerar que, en el nuevo tiempo, dicho factor es temporalmente simétrico, proceso que por supuesto puede ser repetido independientemente para los otros espaciotiempos. De esta forma, el factor de escala puede expresarse como

$$a(\tau) = a_{\min} (\cos \tau)^{-\frac{2}{3|1+w|}}, \quad (3.3.9)$$

al considerar el nuevo tiempo

$$\tau = \frac{3|1+w|}{2} \sqrt{\lambda} (t - t_0) + \arctg \left[ \left( \frac{8\pi}{3\lambda} \rho_0 - 1 \right)^{1/2} \right], \quad (3.3.10)$$

que cubre el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$  en cada universo, alcanzándose los grandes desgarrados en los extremos  $\tau \rightarrow \pm\pi/2$ . Así, cada uno de los universos en el multiverso quedaría definido por un intervalo de tiempo finito.

Si consideramos que todos estos universos son clásicamente idénticos y que nuestro universo debería estar descrito por uno de ellos, podríamos afirmar que los demás universos deberían estar gobernados por las mismas leyes físicas clásicas que el nuestro siendo, por lo tanto, físicamente equivalentes. Ya que, clásicamente, podemos entender que la existencia de vida en nuestro universo se puede justificar por algún tipo de formulación del principio antrópico, que nos asegure que la vida existe en nuestro universo debido a las condiciones iniciales que se dieron en éste, el presente escenario nos sugeriría que la vida como la conocemos debería existir en cada uno de los infinitos universos. No obstante, si consideramos que el origen de la vida debe ser un proceso que dependa en algún sentido de los efectos cuánticos, como parece ser el caso, no sería consistente extrapolar las ideas sobre dicha existencia basándonos en una equivalencia clásica, ya que en ningún caso pretendemos imponer una equivalencia cuántica ni tampoco esperamos que se cumpla.

Por otra parte, si hubiéramos considerado una energía dinámica de nuestro modelo no en la forma de energía fantasma sino como energía oscura con  $1 + w > 0$ , habríamos obtenido también un multiverso formado por universos con características clásicas equivalentes entre sí. No obstante, en este caso, cada uno de estos universos iniciaría su evolución en una gran explosión, crecería de forma decelerada hasta alcanzar un factor de escala máximo finito dado por (3.3.7) y se contraería después hasta morir en una gran implosión (véase la Fig. (3.4)). Así, mientras que la consideración de una constante cosmológica negativa parece aumentar la aceleración de la expansión en el modelo fantasma, o al menos produce un mayor número de regiones donde la evolución es acelerada, en modelos oscuros la introducción de esta constante negativa impide la descripción de un universo acelerado. Por lo tanto, aunque de forma ingenua podríamos relacionar la presencia de una constante cosmológica negativa con una componente gravitatoria que frenaría la expansión, al contrario de la constante positiva que la aceleraría, éste efecto se produce sólo si se combina con energía oscura con  $1 + w > 0$  y no con un fluido fantasma. A la vista de los modelos discutidos en esta sección, lo que podríamos concluir es que la consideración de una componente constante negativa parece multiplicar el número de singularidades que aparecen en el modelo.

Como hemos mencionado, los modelos considerados son totalmente clásicos, con lo que un tratamiento cuántico de las singularidades podría suavizarlas de tal forma que ya no tuviéramos un conjunto infinito de espaciotiempos aislados, implicando la pérdida de este escenario. Sin embargo, tal vez se podría conservar en cierta medida el esquema de un multiverso siempre que consideremos que los universos se encuentren en algún sentido conectados por regiones que evidentemente no pueden ser clásicas.

Finalmente, queremos subrayar que si quisiéramos utilizar estos modelos para des-

cribir nuestro universo deberíamos escoger el que contiene una parte dinámica fantasma en su energía, ya que éste es capaz de describir una fase de expansión acelerada. Por supuesto, para obtener un modelo realista deberíamos considerar al menos una componente de materia, pero esperamos que dicha componente, que entraría en la ecuación de Friedmann (3.3.1) como  $\sim a^{-3}$ , modifique este escenario sólo en el rango de valores pequeños del factor de escala; así, mientras la evolución en los mínimos podría verse afectada, la evolución para factores de escala suficientemente grandes no debería modificarse, en particular los grandes desgarros quedarían intactos (salvo consideraciones de tipo cuántico).

### 3.3.2. El universo observable.

Hemos visto como podemos tratar cada una de las regiones del modelo considerado como a un universo distinto y aislado de sus compañeros. Si ahora consideráramos un observador en una de estas regiones, estaríamos escogiendo un universo de entre todos los demás. Este observador interpretaría su espaciotiempo como el único existente al menos clásicamente. Dicho universo, en ausencia de singularidades pasadas y futuras, debería tener una vida eterna.

Así, para referirnos a las medidas realizadas por dicho observador [24], deberemos re-escalar el intervalo de tiempo finito al que podemos referir su universo, de tal forma que llegue a ser infinito. Por lo tanto, re-definiremos el tiempo como  $T = \text{tg}(\tau)$ , con  $\tau$  definido en Eq. (3.3.10), obteniendo por tanto que éste pertenece al intervalo  $-\infty < T < \infty$ . El factor cósmico de escala en términos de  $T$  quedará

$$a(T) = \frac{a_{\min}}{\cos^{2/(3|1+w|)}(\arctg T)} = a_{\min}(1 + T^2)^{1/(3|1+w|)}. \quad (3.3.11)$$

Una expresión más familiar para el factor cósmico de escala puede ser obtenida mediante otra re-definición del tiempo; así, tomando

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{arccosh}(1 + T^2), \quad (3.3.12)$$

se tiene

$$a(\eta) = a_{\min} \cosh^{1/3|1+w|}(\sqrt{\lambda}\eta), \quad (3.3.13)$$

con  $-\infty \leq \eta \leq \infty$ . De esta forma hemos obtenido una expresión para el factor de escala que en cierto modo recuerda al espacio de de Sitter. De hecho, si recordamos que  $w$  debe ser discreto según la Eq. (3.3.3) con  $m < -1$ , podemos notar que para  $m = -2$ , que corresponde al valor mínimo  $1 + w = -1/3$ , el factor de escala dado por la Eq. (3.3.13), se reduce al de un universo de Sitter cuya parametrización cubre todo

el hiperboloide 5-dimensional, siendo este último hecho consistente con la elección de un intervalo de tiempo  $(-\infty, \infty)$ .

Una vez llegados a este punto, podríamos intentar ver como nuestro modelo se ajusta a los datos obtenidos de las observaciones. Para ello necesitaremos usar el valor actual del coseno hiperbólico de la Eq. (3.3.13) cuya expresión en términos de  $H_0$  y  $\lambda$  se puede obtener mediante dos caminos distintos: (1) evaluando directamente la Eq. (3.3.13) en  $\eta = \eta_0$ , o (2) usando la definición de  $H$  en términos de  $a(\eta)$  y  $\partial_0 [a(\eta)] \equiv da(\eta)/d\eta$  para luego evaluarlo en  $\eta = \eta_0$ . Sin embargo, ambos procedimientos no nos proporcionan el mismo resultado, sino que obtenemos: (1)  $\cosh(\sqrt{\lambda}\eta_0) = 8\pi\rho_0/(3\lambda) = 1 + H_0^2/\lambda$  y (2)  $\cosh(\sqrt{\lambda}\eta_0) = [(\lambda - (3|1+w|)^2 H_0^2)/\lambda]^{-1/2}$ . La razón de esta discrepancia reside en el hecho de que la ecuación de Friedmann (3.3.1) describe al multiverso completo, no a los universos simples, aislados e infinitos que lo componen. De hecho, se puede comprobar que la ecuación de Friedmann más general compatible con una forma funcional como la presentada por el factor de escala (3.3.13) es

$$H^2 = C_n a^{-3(1+w_n)} + \lambda_n, \quad (3.3.14)$$

donde  $C_n = 8\pi\rho_{n0}a_0^{3(1+w_n)}/3 < 0$ ,  $1 + w_n > 0$  y  $\lambda_n = \Lambda_n/3 > 0$ , con  $\rho_{n0}$ ,  $w_n$  y  $\Lambda_n$  valores arbitrarios que serán especificados más adelante. La solución de la Eq. (3.3.14) es

$$a(t_c) = a_{\min} \cosh^{\frac{2}{3(1+w_n)}} \left( \frac{3(1+w_n)}{2} \sqrt{\lambda_n} t_c \right), \quad (3.3.15)$$

$$\text{con } a_{\min} = a_0 \left( \frac{8\pi|\rho_{n0}|}{3\lambda_n} \right)^{\frac{1}{3(1+w_n)}}.$$

Finalmente, igualando las Eqs. (3.3.13) y (3.3.15) obtenemos las siguientes relaciones

$$1 + w_n = 2|1 + w| = \frac{2}{3|m + 1|}, \quad \text{con } m = -2, -3, -4, \dots \quad (3.3.16)$$

$$\left( \frac{8\pi|\rho_{n0}|}{3\lambda_n} \right)^{\frac{1}{3(1+w_n)}} = \left( \frac{8\pi\rho_0}{3\lambda} \right)^{-\frac{1}{3|1+w|}} \quad (3.3.17)$$

y

$$\sqrt{\lambda}\eta = \frac{3(1+w_n)}{2} \sqrt{\lambda_n} t_c; \quad (3.3.18)$$

A partir de las Eqs. (3.3.16) y (3.3.17) se sigue que

$$(8\pi)^3 \frac{|\rho_{n0}|}{\Lambda_n} = \frac{|\Lambda|^2}{\rho_0^2}, \quad (3.3.19)$$

donde hemos utilizado las definiciones de  $\lambda$  y  $\lambda_n$ .

Ahora, podemos utilizar los dos procedimientos anteriormente mencionados para comprobar la consistencia del modelo. De hecho, ambos producen

$$\cosh^2 \left( \frac{3(1+w_n)}{2} \sqrt{\lambda_n} t_{c0} \right) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - H_{n0}^2}, \quad (3.3.20)$$

lo que nos indica que el nuevo tiempo,  $t_c$ , representa una buena elección para el tiempo cósmico.

Una vez que hemos comprobado la consistencia de nuestro estudio, podemos pasar a considerar la física del modelo cosmológico resultante proveniente de la elección de un único universo del multiverso. Así, hemos iniciado nuestro estudio tomando un modelo cosmológico lleno de fluido fantasma, densidad de energía positiva y  $w < -1$ , con una constante cosmológica negativa, de forma tal que la densidad de energía total del vacío fuera positiva, pudiendo así tener un parámetro de Hubble bien definido. Finalmente, hemos obtenido un universo observable lleno también de una energía de vacío total positiva aunque distribuida ahora de manera diferente, con una constante cosmológica positiva y una energía dinámica negativa. Recordando las secciones anteriores podemos notar que esta densidad de energía negativa es un fluido de energía oscura dual,  $w_n > -1$  y  $\rho_n$ , que viola todas las condiciones de energía, con lo que consideraremos que podría existir en nuestro universo por algún efecto de naturaleza cuántica, siempre que sea en cantidades pequeñas, condición que, como veremos a continuación, se cumple. Por otro lado, este modelo final, Eq. (3.3.15), es similar en cierto modo a un universo de Sitter con un tiempo infinito en ambas direcciones, por lo tanto tendrá un horizonte cosmológico; su aceleración será mayor que la del de Sitter mencionado, reduciéndose a él en un caso particular, sin dar lugar a ninguna singularidad en el futuro en cualquier caso.

Esta transformación del escenario inicial al final la hemos realizado en varias fases. Primero hemos considerado uno de los espaciotiempos en los que el espaciotiempo FL-RW original estaba roto debido a las divergencias del factor de escala, Eq. (3.3.5), es decir, nos hemos concentrado en un espaciotiempo que es una restricción del espaciotiempo original, Eq. (3.3.9). Después, bajo la suposición de que nosotros, observadores, “vemos” que estamos viviendo en un espacio similar a un de Sitter, hemos reparametrizado el tiempo a través de varios pasos no triviales hasta llegar a una expresión final del factor cósmico de escala casi-de Sitter. En otras palabras, hemos re-expresado el factor de escala del espacio restringido, Eq. (3.3.9), en términos de nuestro tiempo, que no coincide con el tiempo cósmico de este escenario, obteniendo finalmente la Eq. (3.3.13). A continuación, hemos supuesto que nosotros, como observadores del universo, podríamos suponer que nuestro tiempo debe ser el tiempo cósmico (ya que, a parte de la rotación de nuestra galaxia o conglomerado, parece que no sufrimos ningún



movimiento con respecto a la expansión) y así estaríamos considerando un espacio-tiempo en el que el tiempo cósmico fuera el nuestro, es decir, un universo FLRW en el que el factor cósmico de escala toma la forma (3.3.13), siendo por tanto distinto del FLRW original y que, al menos a primera vista, no parecen estar relacionados mediante una transformación conforme. Eso sí, dado que el espaciotiempo inicial y final comparten la misma simetría, podría ser que las hipersuperficies espaciales de ambos espacios normales a sus respectivos tiempos cósmicos fueran las mismas. Si este fuera el caso, una super-observadora viviendo en el espacio original sería capaz de estudiar el espacio final si por alguna razón decidiera pensar cual sería el resultado de embeber sus hipersuperficies espaciales cósmicas en el tiempo cósmico del observador; sin embargo, si un observador en el espacio final quisiera realizar un estudio de este tipo, no sería capaz de recuperar el espaciotiempo completo de esa super-observadora, sólo obtendría una sección restringida de él.

### 3.3.3. Posible conexión entre la física de partículas y la cosmología.

Como ya hemos mencionado al introducir esta sección, existen ciertos problemas en la física teórica actual que parecen hacer incompatibles la física de partículas con la cosmología. Así, consideraremos tres situaciones donde dichas incompatibilidades podrían ser aparentes: el problema de la constante cosmológica, la existencia de una flecha de tiempo en cosmológica y la predicción de la expansión acelerada sobre un horizonte de tamaño propio finito. En el presente escenario, argumentaremos que esos problemas son realmente problemas aparentes en un escenario de multiverso donde desaparecerían, teniendo en cuenta que nuestro universo debe ser sólo una parte de la realidad física total. De esta forma, mientras que la física de partículas podría estar bien definida en el escenario completo del multiverso o, lo que es lo mismo al ser todos los universos idénticos, en un sólo universo referido al tiempo finito, la cosmología se definiría en uno de los infinitos espaciotiempos independientes que forman el multiverso cuando éste es referido a un tiempo cósmico infinito apropiado [24].

**El valor de la constante cosmológica.** En primer lugar consideraremos el llamado problema de la constante cosmológica. Debido a nuestra conjetura tendremos en cuenta que el valor actual del parámetro de Hubble que aparece en nuestro universo, (3.3.14), vendrá dado por los datos de las observaciones, ([50]),  $H_{n0} \sim 10^{-26}(\text{metros})^{-1}$ . En este modelo la energía oscura tendrá una parte dinámica que, al violar todas las condiciones de energía, debería ser muy pequeña; si esto fuera así tendríamos  $H_{n0}^2 < \Lambda_n \sim 10^{-52}(\text{metros})^{-2}$ . Por otro lado, si consideramos que el valor absoluto

de la densidad de energía del vacío del multiverso debe ser 120 ordenes de magnitud mayor que la predicha en cosmología, lo que no es más que el problema de la constante cosmológica, tendremos  $|\Lambda| \sim 10^{67}(\text{metros})^{-2}$ . Teniendo en cuenta estos datos en la Eq. (3.3.19) obtenemos

$$\rho_0^2 = \frac{10^{77}(\text{metros})^{-6}}{|\rho_{n0}|}. \quad (3.3.21)$$

Además, considerando que tenemos un parámetro de Hubble bien definido en el multiverso, sabemos que  $\rho_0 > \Lambda/(8\pi)$  lo que, junto con la Eq. (3.3.21), implica

$$|\rho_{n0}| < 10^{-53}(\text{metros})^{-2}. \quad (3.3.22)$$

Así, en este escenario es natural tener una constante cosmológica en el multiverso cuyo valor absoluto sea 120 ordenes de magnitud mayor que el de la constante cosmológica en el universo observable, siempre que la densidad de energía oscura dual sea lo suficientemente pequeña lo que, en cualquier caso, debería cumplirse.

**La flecha del tiempo.** Cualquier modelo cosmológico, incluyendo el que ha dado lugar al multiverso, posee una flecha del tiempo intrínseca, es decir, una dirección privilegiada que hace que el tiempo sólo fluya hacia el futuro. Si la física de partículas y campos es temporalmente simétrica y estamos considerando que ésta se describe en el multiverso, o en uno de sus universos temporalmente finitos al ser todos ellos idénticos, deberíamos encontrar alguna razón física que hiciera que este modelo fuera temporalmente simétrico. Esta razón podría basarse en la consideraciones de agujeros negros y de gusano en el multiverso que pudieran crecer de manera divergente debido a la acreción de energía fantasma. Así, si tenemos en cuenta el parámetro de Hubble que se obtiene a partir de la Eq. (3.3.4) insertándolo en la Eq. (2.2.21), obtenida en el capítulo anterior para describir la evolución de un agujero de gusano visto desde el límite asintótico, obtenemos

$$m(t) = m_0 \left[ 1 - \frac{8\pi Q \rho_0 m_0}{3\lambda^{1/2}} \frac{\sin(\alpha(t - t_0))}{\cos(\alpha(t - t_0)) - b \sin(\alpha(t - t_0))} \right]^{-1}. \quad (3.3.23)$$

Se puede deducir fácilmente que esta expresión se anula un número infinito de veces en los grandes desgarros, (3.3.5), y diverge también infinitas veces en

$$t_{*n} = t_0 + \frac{2}{3|1+w|\sqrt{\lambda}} \arctg \left[ \frac{1}{b+\xi} \right] + \frac{2n\pi}{3|1+w|\sqrt{\lambda}}, \quad (3.3.24)$$

donde hemos definido  $\xi = \frac{8\pi Q \rho_0 m_0}{3\sqrt{\lambda}}$  y  $n$  es un entero. Cabe destacar que las divergencias tendrán por tanto la misma periodicidad que los grandes desgarros para  $b$  y  $\xi$  fijos, es decir, considerando un observador particular,  $H_0$ , y un agujero de gusano dado,  $m_0$ .

Como en el caso del gran desgarro, podemos recuperar la expresión para el gran viaje de un modelo fantasma con  $w$  constante y sin constante cosmológica, haciendo  $m = 0$  y expandiendo la Eq. (3.3.24) para  $\lambda \ll 1$ . Así, se tiene

$$t_* = t_0 + \frac{t_{br} - t_0}{1 + \left(\frac{8\pi\rho_0}{3}\right)^{1/2} Qm_0}, \quad (3.3.25)$$

que no es más que la Eq. (2.2.12) obtenida en el capítulo anterior.

Para estudiar los distintos posibles viajes, resulta sin embargo más simple extraer las conclusiones a partir de la expresión general, Eq. (2.2.21), es decir

$$m(t) = \frac{m_0}{1 - Qm_0[H(t) - H_0]}. \quad (3.3.26)$$

Así, para una super-observadora en la zona en expansión de uno de los universos finitos que componen el multiverso, por lo tanto con  $H_0 > 0$ , un agujero de gusano llegará a tener un tamaño infinitamente grande en su futuro antes de alcanzarse la singularidad. Si esta super-observadora se encontrase, por el contrario, en una región en contracción, también tendría lugar una divergencia de un agujero de gusano en su futuro; esta divergencia se encontraría en la zona en expansión (contracción) si  $|H_0| < 1/(Qm_0)$  ( $|H_0| > 1/(Qm_0)$ ).

De forma similar, mediante el uso de la Eq. (2.1.25), podríamos concluir que una super-observadora en la región en expansión encontraría que hubo un agujero negro infinitamente grande en el pasado de la evolución de su universo; encontrándose este fenómeno en la zona en contracción (expansión) si  $H_0 < 1/(AM_0)$  ( $H_0 > 1/(AM_0)$ ). También otra super-observadora en la región de contracción deduciría que un suceso de este tipo ha tenido lugar en su pasado.

Así, para cada super-observadora en cada región de un universo finito habrá al menos una divergencia de un agujero de gusano antes de que se llegue al gran desgarro, y una divergencia de un agujero negro en el pasado. De esta forma, en un escenario de este tipo, se podrían formar los distintos puentes temporales presentados en la subsección 3.1.3, viajando el universo libremente del futuro al pasado y viceversa y destruyendo cualquier flecha del tiempo en el multiverso, al menos durante los grandes viajes.

Hemos demostrado de esta forma que, si tenemos en cuenta los procesos adicionales que acabamos de considerar en esta sección, las conclusiones obtenidas a este respecto en la Ref. [24] mantienen su validez.

Por otra parte, si consideramos un observador que vive en la región en expansión de un universo simple temporalmente infinito<sup>16</sup>, como podríamos ser nosotros, tendremos

---

<sup>16</sup>La diferencia principal de este caso con respecto al anterior, que produce la obtención de resultados

que tener en cuenta la Eq. (3.3.15) para estudiar el crecimiento de estos objetos. Así, se tiene

$$m(t_c) = m_0 \left[ 1 + Qm_0 H_{n0} - Qm_0 \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tgh} \left( \frac{3(1+w_n)}{2} \sqrt{\lambda_n} t_c \right) \right]^{-1}. \quad (3.3.27)$$

Definiendo la función  $F(t_c) = Qm_0 \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tgh} \left( \frac{3(1+w_n)}{2} \sqrt{\lambda_n} t_c \right)$  podemos notar que, al ser ésta una función creciente positiva si  $t_c > 0$  y negativa si  $t_c < 0$  con asíntotas en  $\pm Qm_0 \sqrt{\lambda_n}$ , el denominador de la parte derecha de la Eq. (3.3.27) divergirá en un tiempo finito si y sólo si  $Qm_0 \sqrt{\lambda_n} > 1 + Qm_0 H_{n0}$ , lo que implica  $m_0 > m_{\min} = [Q(\sqrt{\lambda_n} - H_{n0})]^{-1}$ . Ahora, teniendo en cuenta la expresión de  $H_{n0}$  en términos de  $\rho_{n0}$  y  $\lambda_n$ , y que  $\lambda_n > |\rho_{n0}|$ , podemos expandir la expresión de la masa mínima obteniendo  $m_{\min} \simeq 3\sqrt{\lambda_n}/(4\pi Q|\rho_{n0}|)$  que, con los datos y cotas anteriormente presentados y una constante de flujo de orden unidad, implica  $m_{\min} > 10^{27}$  metros. Por lo tanto, para que un observador en el universo simple temporalmente infinito tuviera la posibilidad de realizar un gran viaje con todo su universo, debería existir un agujero de gusano con una masa exótica superior a la masa de su universo observable, lo que no parece estar de acuerdo con las observaciones. Es más, de forma similar a los estudios ya mostrados, es posible comprobar que los agujeros negros decrecerían en la zona en la que se encuentra el observador considerado. De esta forma, la flecha del tiempo quedaría intacta para dicho observador.

**El horizonte.** Los universos en expansión acelerada pueden predecir un horizonte cosmológico de tamaño finito, en particular como sucede en el universo de Sitter o parecería suceder en los casi-de Sitter que consideramos en el universo aislado infinito, (3.3.15). Por otra parte, la definición de un conjunto de observables análogos a la matriz-S, necesarios para definir la teoría de cuerdas, no sería posible en escenarios acelerados debido al horizonte que estos poseen [156; 157; 158; 159]. En estos modelos no se puede, por tanto, considerar puntos infinitamente alejados entre sí ya que existe una lejanía máxima finita caracterizada por el horizonte. La condición para la existencia del horizonte cosmológico en un modelo dado es:

$$\chi = \int_t^{t_f} \frac{dt'}{a(t')} < \infty. \quad (3.3.28)$$

Sin embargo, como acabamos de mostrar, al tener en cuenta el proceso de acreción de energía fantasma en agujeros negros y de gusano, concluimos que en cada universo finito que forma el multiverso podría conectarse con él mismo o con otro universo

---

distintos, no es sólo la forma funcional del parámetro de Hubble, sino que éste no tomará ahora todos los valores posibles desde  $-\infty$  a  $\infty$ .

idéntico. De esta forma, podemos considerar que un agujero de gusano con un tamaño mayor que el del universo observable de un universo se podría conectar con un agujero negro, también enorme, del universo “siguiente”, y así sucesivamente haciendo que el intervalo de tiempo de  $(-\infty, \infty)$  recobre su significado; es más, si la conexión entre estos fuera de otro tipo sería equivalente a ésta por ser todos los universos clásicamente indistinguibles. Así, como  $t_f \rightarrow \infty$ , esperamos que la expresión (3.3.28) diverja al considerar el factor de escala (3.3.4).

Por otro lado, en un único universo temporalmente infinito el factor de escala, como hemos mencionado, tiene una forma que recuerda a un universo de de Sitter temporalmente infinito hacia el pasado y el futuro, recuperando el mismo si  $m = -2$ , con lo que una expresión similar a la Eq. (3.3.28) con  $t_c$  en lugar de  $t$  y con el  $a(t_c)$  de la Eq. (3.3.15) debería converger, apareciendo, por tanto, un horizonte cosmológico en nuestro universo observable.

Las consideraciones que acabamos de realizar nos permiten conjeturar que la realidad física consiste en un multiverso cuya estructura podría estar descrita, por ejemplo, por un modelo como el presentado, ya que un modelo tan simple nos permite considerar un escenario que no conlleve los problemas planteados, al tener en cuenta que lo que llamamos nuestro universo no es más que uno de los infinitos universos idénticos que forman el multiverso. De esta forma, un observador situado en uno de estos universos percibiría un espacio que se expande actualmente de forma super-acelerada a lo largo de un tiempo cósmico infinito e irreversible con un comportamiento que recuerda en cierto modo a un modelo de Sitter temporalmente infinito en ambas direcciones. El precio que hemos pagado ha sido admitir la existencia de un fluido oscuro dual, esta vez no proveniente de un escenario de branas, que viola todas las condiciones de energía, aunque éste estaría compensado por una constante cosmológica positiva mucho mayor en magnitud. La existencia de dicho fluido se podría justificar si éste estuviera presente en cantidades pequeñas y considerándolo proveniente de algún efecto cuántico pero, en este escenario, al estar la física de partículas definida en el multiverso, el tipo de efecto que lo justifica debería ser la propia estructura presentada.

### 3.4. Conclusiones y reflexiones.

En este capítulo hemos presentado algunos modelos que son capaces de describir la época acelerada actual de nuestro Universo, pudiendo ser válidos en dicha época y en el futuro del universo, al crecer la densidad de energía fantasma con la expansión y decrecer más lentamente la energía oscura con  $w > -1$  que la materia ordinaria.

También hemos indicado que estos escenarios deberían ser modificados si quisiéramos describir de una forma realista la evolución pasada de nuestro Universo. Esperamos que tales modificaciones afecten a los modelos en el rango de valores pequeños del factor cósmico de escala.

En la sección 3.1 hemos presentado los modelos inspirados en un escenario de Randall-Sundrum tipo 1 [20] con un contenido de energía oscura con  $w$  constante y en los que aparece una región central llena de un nuevo fluido, el dual, definido como  $\rho < 0$  y  $w$  el correspondiente de su compañero no-dual, [19]. Esta región central es resultado del doblado de las singularidades que aparecería en dicho escenario. Así, estudiando en mayor profundidad el caso fantasma, hemos obtenido un escenario que nos ha permitido caracterizar los posibles grandes viajes de nuestro universo, clasificándolos en: (1) procesos que involucran un sólo agujero de gusano, que cobran sentido en un escenario de multiverso y, por lo tanto, no implican un viaje temporal de nuestro universo; (2) procesos que involucran dos agujeros de gusano, en el que dos de estos objetos se besan formando una construcción que permite al universo atravesarla viajando hacia su futuro o hacia su pasado; y (3) procesos que involucran un agujero negro y uno de gusano, que serían similares a los tratados en el caso (2) teniendo en cuenta que uno de los objetos involucrados posee ahora una membrana unidireccional. De esta forma, el proceso (1), obviamente, no implicaría ninguna violación de la causalidad y tampoco lo harían los procesos (2) y (3), al menos desde un punto de vista local.

En la sección 3.2 hemos mostrado una serie de modelos fantasmas en los que la energía oscura posee la ecuación de estado de un gas de Chaplygin generalizado, Eq. (3.2.1). Mientras que esta extraña ecuación de estado suavizaba las posibles implicaciones singulares fantasmas en un caso de PGCG ya estudiado en la literatura [7] (PGCG 1), hemos mostrado como la consideración de ésta no libraría al universo de un final cósmico, ya que otros modelos de PGCG, los PGCG 2 y 4, darían lugar a una singularidad futura de naturaleza distinta al gran desgarró; en particular, el final del mundo en estos casos sería una gran congelación que sufriría el universo con factor de escala finito al llenarse de energía fantasma [21; 22]. Por otro lado, la consideración del fluido dual en un contexto de branas sugeriría, al igual que en el caso anterior, una posible duplicación de las singularidades, aunque este hecho debería ser confirmado en una expresión analítica del factor cósmico de escala en estos modelos. Por otro lado, al igual que sucediera con el gran desgarró, la gran congelación podría ser evitada por un gran viaje en los modelos PGCG que presentan dicho comportamiento singular, que no aparecería en los casos correspondientes de DPGCG en los que el universo podría acabar siendo engullido por un agujero negro, obtenido al realizar un estudio del proceso de acreción en el que no aproximáramos el fenómeno tratándolo mediante parámetros efectivos.

Debemos destacar que la posible consideración del dual en las dos secciones mencionadas es resultado de un escenario de branas en el que podemos definir una densidad de energía efectiva positiva, es decir, en el que, aunque la dinámica del universo debe estar gobernada por cantidades físicas, los observadores podríamos pensar que el contenido del universo tiene una densidad de energía positiva si no nos percatáramos de que nos encontramos en un escenario de este tipo.

En la última sección, 3.3, hemos considerado un modelo cosmológico que contiene una constante cosmológica negativa, debiendo ésta ser compensada, por lo tanto, por una densidad de energía dinámica positiva que ha sido descrita mediante un fluido oscuro, [23]. En el caso en el que dicho fluido oscuro sea energía fantasma, con  $w$  constante, el presente modelo presenta infinitos grandes desgarros lo que nos permite interpretar las regiones entre ellos como distintos universos aislados y clásicamente equivalentes. El estudio de uno de estos universos referido a un tiempo cósmico infinito [24], nos ha permitido avanzar una conjetura más bien osada: mientras la física fundamental debe estar bien definida en el contexto completo del multiverso, o en uno de sus componentes temporalmente finitos al ser todos equivalentes, la cosmología se debe referir a las observaciones que realizamos en nuestro universo aislado y temporalmente finito. Suponiendo que esta conjetura se cumple, hemos visto como ciertos problemas que afectan a la compatibilidad de distintas ramas de la física podrían no estar presentes, sugiriendo así no tanto que este modelo simple particular sea necesariamente la solución a dichos problemas, sino que un cambio conceptual podría desvanecer ciertas cuestiones fundamentales.

Queremos destacar que la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad que pueda describir la época inicial del universo podría reaparecer de nuevo también en su posible final. Así, como el gran desgarro evidenció, los efectos cuánticos no deben estar necesariamente asociados a factores de escala pequeños sino que estos deberían también aparecer a factores de escala infinitamente grandes, lo que podría suavizar la singularidad [62]. En este capítulo hemos presentado como el universo podría sufrir un final en el que éste congelara su evolución a un valor del factor cósmico de escala finito y no-nulo, revelando de esta forma como aparecería la necesidad de considerar efectos cuánticos a cualquier valor de este factor, estando por lo tanto dichos efectos ligados a densidades de energía altas y siendo independientes del tamaño en cuestión. De hecho, posteriormente a los trabajos en los que se basa la gran congelación presentada en este capítulo [21; 22], ha sido sugerido que la consideración de estos efectos podría suavizar también esta singularidad [160].

Por otro lado, a la vista de los modelos utilizados, podemos resaltar un hecho curioso: la discretización del parámetro de la ecuación de estado  $w$  en los modelos de las

secciones 3.1 y 3.3 y del parámetro  $\alpha$  en algunos tipos de PGCG, dual o no, de la sección 3.2. Mientras que en el caso de  $\alpha$  este hecho parecería suponer simplemente la utilización de un cierto parámetro discreto en el exponente de la ecuación de estado (3.2.1), en el caso de  $w$  la discretización podría tener implicaciones que irían más allá. De hecho, en los modelos presentados en 3.1 y 3.3, la discretización de este parámetro, que ya fue obtenida en otro modelo previamente [136], implicaría la discretización del factor cósmico de escala, de la densidad de energía y de todas las cantidades físicas que se derivan de estas magnitudes. Así, este hecho podría sugerir que una implementación de dicha discretización tal vez sería un paso en la comprensión de los fenómenos cuántico-gravitatorios en el sentido en el que el trabajo de Planck sobre la radiación del cuerpo negro o los postulados de Bohr resultaron a la postre ser respecto a la teoría cuántica.

De esta forma, las características que aparecen en los estudios presentados podrían poner de manifiesto los límites de la teoría utilizada, así como su interpretación podría sugerir líneas de investigación futuras hacia una mejor comprensión de nuestro universo.



## Capítulo 4

# Agujeros de gusano: Radiación, termodinámica y acreción.

Como ya hemos señalado en varias ocasiones, fue a partir del trabajo de Morris y Thorne, [101], cuando el estudio de los agujeros de gusano lorentzianos, macroscópicos y estables, que pueden ser utilizados para un viaje inter-estelar, a los que nos referimos simplemente como agujeros de gusano, comenzó a desarrollarse. Estos objetos son atajos entre dos regiones del mismo universo o pasillos de entrada a otro universo, aunque probablemente su propiedad más fascinante sea la aparente facilidad con la que podrían convertirse en máquinas del tiempo al, por ejemplo, presentar un movimiento relativo entre sus bocas [8; 101]. Por otro lado, estos objetos parecían plantear un problema inevitable ya que el tipo de materia que genera su geometría, que se llamó materia exótica, debe violar la condición de energía nula. Si bien este problema no causó el abandono del estudio de los agujeros de gusano, si lo restringió mayoritariamente al planteamiento de soluciones particulares que requieren pequeñas cantidades de materia exótica (véase, por ejemplo, el capítulo 15 de la Ref. [100]), hasta que el descubrimiento de la expansión acelerada de nuestro universo, en particular su posible explicación mediante la dominación de un fluido fantasma [4], que viola la condición de energía nula, proporcionó un escenario natural donde los agujeros de gusano podrían existir.

La posibilidad de utilizar a la energía fantasma como la materia exótica que genera los agujeros de gusano, como ya se ha mencionado tanto en la introducción como en la sección 2.2 del Capítulo 2, ha sido corroborada en diferentes estudios [9; 10; 11], considerando incluso distintas ecuaciones de estado para esta sustancia. Por lo tanto, en el presente escenario, los agujeros de gusano no deben seguir siendo considerados sólo como descripciones de espaciotiempos de juguete, de interés únicamente matemático y que generan especulaciones que sirven como argumento a los escritores de ciencia

ficción, sino que también son realidades físicamente plausibles que podrían existir en nuestro propio Universo. De hecho, como hemos visto en este memoria, la posible existencia de los agujeros de gusano podría llegar a tener influencia incluso a escalas cosmológicas debido al proceso de acreción de energía fantasma [13; 18].

Dado el estatus adquirido por los agujeros de gusano, el siguiente paso parece ser la búsqueda de estas estructuras en nuestro Universo. Cramer y col. [161] fueron los primeros en notar que, al igual que una masa positiva afecta a la trayectoria de los rayos de luz, una masa negativa, en particular un agujero de gusano, deflectaría los rayos provenientes de una fuente situada más allá de éste con respecto al observador, tomando en este caso el término deflexión el significado apropiado. El efecto producido no sería simplemente el de una lente divergente, como podría suponerse a primera vista, sino que incrementaría la intensidad recibida por el observador o la haría desaparecer si dicho observador se encontrara dentro de una cierta región umbral. En esta línea, otros estudios han profundizado en estos efectos de microlentes [162; 163; 164], así como los posibles efectos de macrolentes que podrían originarse si el agujero de gusano fuera suficientemente grande [165]. Sin embargo, los agujeros de gusano no sólo afectarían a la trayectoria de los rayos que pasasen a una cierta distancia de ellos, sino también a la de aquellos que pasaran a través de ellos provenientes de otro universo [166; 167]. En este caso, como se podría esperar [8], el agujero de gusano sí haría divergir los rayos de luz, produciendo un disco cuya intensidad alcanza varios máximos y mínimos relativos, dependiendo del radio, situándose el máximo absoluto en el borde [167]. No obstante, si por alguna razón la intensidad en el borde fuera mucho mayor que en el interior [166], esta figura podría ser confundida con el anillo de Einstein producido por la deformación de la luz debida a un objeto astronómico masivo de masa positiva al situarse éste en el eje formado por la fuente y el observador, como ha señalado González-Díaz<sup>1</sup> [168]. En resumen, mientras que la deformación en las trayectorias de los rayos en las cercanías de un agujero de gusano podría ser debida a cualquier otro objeto astronómico con masa negativa, si existieran, la huella observacional producida por los rayos que pasaran a través de dicho agujero provenientes de otro universo tal vez podría llegar a ser confundida, en todo caso, con la deformación en la trayectoria de los rayos colindantes a un objeto masivo con masa positiva. De esta forma, si en un futuro fuera posible observar ambos efectos combinados, habríamos encontrado un agujero de gusano.

Por otro lado, la descripción termodinámica de los agujeros negros [87] y de solu-

---

<sup>1</sup>Debemos destacar que mientras en la Ref. [166] se habla de una estructura de este tipo, en [167] se afirma que una interpretación correcta de los resultados indicaría la presencia de una mancha luminosa en el caso de que el número de estrellas del otro universo fuera infinito, tendiendo a distinguirse los máximos y mínimos cuanto más se separa el caso real de esta idealización.

ciones de vacío, modelo de Sitter [123], ha proporcionado mayor consistencia a estos espaciotiempos, permitiendo incluso una comprensión más profunda de su estructura y propiedades. Siguiendo este espíritu, una posible representación termodinámica de los agujeros de gusano podría ayudarnos a entender mejor las propiedades de estos objetos así como del tipo de energía que los genera, la cual podría ser, precisamente, la más abundante en el universo. Por lo tanto, en el presente capítulo, consideraremos las posibles propiedades termodinámicas de los agujeros de gusano; aunque, por la propia definición de dichos agujeros, estos no poseen un horizonte, ya que si así fuera no podrían ser atravesados en ambas direcciones, este estudio podrá ser realizado considerando el horizonte atrapante.

La importancia de utilizar estos horizontes atrapantes para caracterizar a los agujeros negros a través de consideraciones locales ha sido señalada por Hayward en distintos trabajos [27; 28; 117; 169], ya que una propiedad global como el horizonte de sucesos no puede ser medida por un observador. De esta forma, este autor ha desarrollado un formalismo capaz de describir las propiedades termodinámicas de los agujeros de gusano dinámicos y esféricamente simétricos, basada en la existencia de los horizontes atrapantes. Así, la presencia de estos horizontes en el espaciotiempo de un agujero de gusano permitiría, también, el estudio de dicho objeto, mostrando ciertas propiedades similares entre éstos y los agujeros negros [170], al caracterizarse ambas estructuras localmente mediante horizontes atrapantes exteriores que serán, respectivamente, de tipo espacio o nulos y de tiempo tiempo. Por lo tanto, la idea de que los agujeros de gusano podrían mostrar ciertas características y propiedades análogas a las de los agujeros negros parece natural, en particular una termodinámica de los agujeros de gusano (como ha sido sugerida e introducida por Hayward [170]) y una posible radiación térmica análoga a la de Hawking.

Como veremos, la clave de nuestro estudio no radica solamente en aplicar el formalismo desarrollado por Hayward, [27; 28; 117; 169], al espaciotiempo de los agujeros de gusano, sino en notar que los resultados provenientes del método de acreción, [14; 15] y [13; 18], deben ser equivalentes a los que se obtengan mediante el formalismo mencionado, lo que permitirá una caracterización unívoca de los agujeros de gusano. Esta caracterización, junto con la consideración de que la energía fantasma debe poseer una temperatura negativa [29; 30], nos permitirá dotar de un significado físico bien definido a la radiación térmica de tipo Hawking que aparecerá en dichos objetos, llevándonos a sugerir tres leyes termodinámicas.

Así, en este capítulo empezaremos por resumir algunos conceptos previos necesarios para nuestro desarrollo, relativos a la solución de Morris y Thorne (algunos de los cuales ya fueron introducidos en la sección 2.2), 4.1.1 y al formalismo de Hayward, 4.1.2. Este

formalismo será aplicado a los agujeros de gusano de Morris-Thorne en la sección 4.2. En la sección 4.3 introduciremos una caracterización consistente para los agujeros de gusano dinámicos, que nos permitirá derivar una radiación térmica de estos objetos y formular su termodinámica (sección 4.4). Finalmente, en la sección 4.5, presentaremos las conclusiones e incluiremos algunos comentarios adicionales. Por conveniencia, a lo largo de este capítulo, hemos utilizado una signatura  $(-, +, +, +)$ .

Este capítulo está basado en el estudio publicado en las Refs. [25; 26]. Durante el proceso de publicación de estos trabajos Hayward [171] realizó un estudio similar al nuestro, dicho estudio, que no contiene ningún cálculo explícito sobre la radiación térmica, carece de una caracterización unívoca de los agujeros de gusano, no permitiendo una formulación unívoca de la termodinámica de estos objetos. En la última sección del presente capítulo, 4.5, señalaremos cuidadosamente las diferencias cruciales en las consideraciones de ambos trabajos, que implican conclusiones distintas aunque no-excluyentes.

## 4.1. Conceptos previos

### 4.1.1. Agujeros de gusano de Morris-Thorne.

Como ya se ha mencionado en esta memoria, Morris y Thorne [101] consideraron una métrica general, estática y esféricamente simétrica, que pudiera describir un agujero de gusano estable y susceptible de ser atravesado. Esta solución describe una garganta conectando dos regiones asintóticamente planas del espaciotiempo, sin ningún horizonte de sucesos. Esta métrica es

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.1.1)$$

donde la coordenada  $-\infty < l < \infty$  y la función  $\Phi(l)$  debe ser finita para todo valor de  $l$ . Para recuperar el límite asintóticamente plano se debe tener  $r(l)/|l| \rightarrow 1$  y  $\Phi(l) \rightarrow \text{constante}$  cuando  $l \rightarrow \pm\infty$ . Por otro lado, la garganta del agujero de gusano es el mínimo de la función  $r(l)$ ,  $r_0$ , que podemos situar sin pérdida de generalidad en  $l = 0$ , cubriendo, por tanto,  $l < 0$  y  $l > 0$  las dos regiones asintóticamente planas conectadas mediante la garganta en  $l = 0$ .

Si expresamos este espaciotiempo en término de las coordenadas de Schwarzschild, obtenemos

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - K(r)/r} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.1.2)$$

donde  $\Phi(r)$  y  $K(r)$  son conocidas como la función corrimiento y la función forma,

respectivamente, y, se debe destacar, que ahora son necesarios dos conjuntos de coordenadas para cubrir las dos regiones, cada una de ellas con  $r_0 \leq r \leq \infty$ . Para recuperar un espacio plano en el límite asintótico, tanto  $\Phi(r)$  como  $K(r)$  deben tender a una constante en dicho límite. Por otro lado, el radio mínimo,  $r_0$ , corresponde a la garganta, donde  $K(r_0) = r_0$ . Aunque el coeficiente de la métrica  $g_{rr}$  diverge en la garganta, esta superficie será sólo una singularidad aparente ya que la distancia radial propia

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr^*}{\sqrt{1 - K(r^*)/r^*}}, \quad (4.1.3)$$

debe ser finita en todas partes.

Para visualizar este espaciotiempo podemos utilizar el diagrama embebido, que fue presentado en la sección 2.2, [101] (véase también [100] o [172]). Este diagrama puede ser obtenido sirviéndonos de la simetría esférica de la variedad, que nos permite considerar, sin pérdida de generalidad, una sección del espaciotiempo definida por  $\theta = \pi/2$ . Esta sección estará descrita a un cierto tiempo constante por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - K(r)/r} + r^2 d\varphi^2. \quad (4.1.4)$$

Ahora consideramos un espaciotiempo euclídeo tridimensional en coordenadas cilíndricas, es decir

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4.1.5)$$

del que la sección es una superficie embebida descrita por una ecuación  $z = z(r)$ . Por lo tanto, la Eq. (4.1.5), evaluada en la superficie, produce

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.1.6)$$

A la vista de (4.1.4) y (4.1.5), obtenemos la ecuación de la superficie embebida

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left[ \frac{r}{K(r)} - 1 \right]^{-1/2}, \quad (4.1.7)$$

que diverge en la garganta y tiende a cero en el límite asintótico. Para que esta geometría describa un agujero de gusano la garganta debe extenderse hacia afuera, en que lo que de esta forma se conoce como la condición de “extensión hacia afuera”. Matemáticamente esta condición implica que la inversa de la función embebida debe tener una derivada

---

<sup>2</sup>En general, podrían tenerse distintas funciones  $\Phi(r)$  y  $K(r)$  en cada región, [100], aunque para nuestros intereses esta libertad carece de importancia.

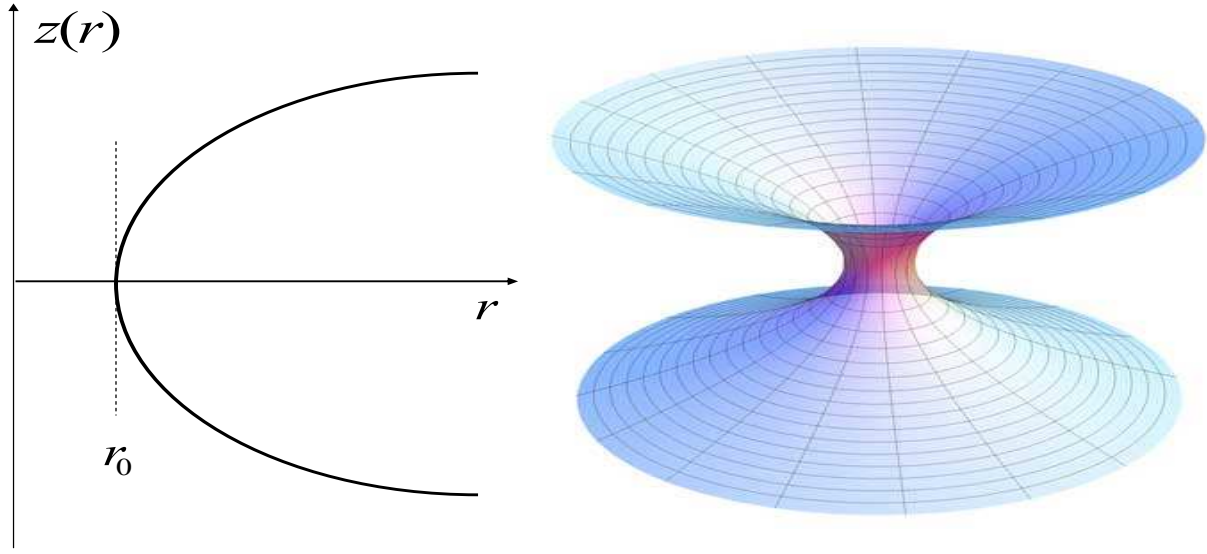


Figura 4.1: A la izquierda mostramos la evolución de la función  $z(r)$ . Se puede ver fácilmente que la tangente de su inversa deberá crecer para que el agujero de gusano se abra hacia el espacio exterior. A la derecha mostramos el diagrama embebido de la sección a tiempo constante del agujero de gusano que uniría dos espacios entre sí o dos regiones del mismo espacio (véase también Fig. (2.1) del Capítulo 2.)

creciente en la garganta y cerca de la misma, es decir  $(d^2r)/(d^2z) > 0$ , que, tomando la inversa de la Eq. (4.1.7) y derivando con respecto a  $z$ , se puede escribir como

$$\frac{K(r) - rK'(r)}{2(K(r))^2} > 0; \quad (4.1.8)$$

reduciéndose en la garganta a  $K'(r_0) < 1$ .

Por otro lado, considerando que en una base ortonormal el tensor de energía momento se expresa como  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho(r), p_r(r), p_t(r), p_t(r))$ , las ecuaciones de Einstein de este espaciotiempo implican [100; 101; 172]

$$\rho(r) = \frac{K'(r)}{8\pi r^2}, \quad (4.1.9)$$

$$p_r(r) = -\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{K(r)}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{K(r)}{r} \right) \frac{\Phi'(r)}{r} \right], \quad (4.1.10)$$

$$p_t(r) = \frac{1}{8\pi} \left[ \Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 + \frac{K - K'(r)r}{2r^3(1 - K(r)/r)} (r\Phi'(r) + 1) + \frac{\Phi'(r)}{r} \right]. \quad (4.1.11)$$

La condición (4.1.8) referida a la garganta, teniendo en cuenta las Eqs. (4.1.9) y (4.1.10), produce  $\rho(r_0) + p(r_0) < 0$ , con lo que el material que genera esta geometría deberá violar la condición de energía nula en la garganta y en un entorno de la misma.

Por otra parte, para disminuir la exotividad del material utilizado, se podría exigir que, al menos, la densidad de energía fuera positiva, lo que implicaría  $K'(r) > 0$ .

Aparte de que ciertos efectos cuánticos como el efecto Casimir pudieran permitir violaciones de la condición de energía nula, como hemos mencionado, la violación de esta condición de energía ha ganado naturalidad a la vista de la expansión acelerada del universo. Es más Suskhov [9] y Lobo [10] han extendido la noción de energía fantasma en espaciotiempos esféricamente simétricos, mostrando como una versión inhomogénea de esta energía podría ser la materia exótica que generase los agujeros de gusano de Morris-Thorne, al considerar que la presión radial es la que está relacionada con la densidad de energía mediante la ecuación de estado, pudiendo calcularse las componentes transversales a través de las ecuaciones de Einstein, teniendo así, en general, otra ecuación de estado (véase también [11] como ejemplo de agujero de gusano generado por PGCG).

#### 4.1.2. Horizontes atrapantes

Como herramientas necesarias para las siguientes secciones de este capítulo, en la presente subsección resumimos algunos de los conceptos y la notación del formalismo de Hayward, basado en la dinámica doblemente-nula y que es aplicable a espaciotiempos esféricamente simétricos [27].

En primer lugar, se debe notar que la métrica de un espaciotiempo con simetría esférica se puede escribir de forma general, al menos localmente, como

$$ds^2 = 2g_{+-}d\xi^+d\xi^- + r^2d\Omega^2, \quad (4.1.12)$$

donde  $r > 0$  y  $g_{+-} < 0$  son funciones de las coordenadas nulas  $(\xi^+, \xi^-)$ , relacionadas con las dos direcciones nulas normales favorecidas de cada esfera de simetría  $\partial_{\pm} \equiv \partial/\partial\xi^{\pm}$ ,  $r$  es el llamado radio del área [27], el cual es un invariante geométrico, y  $d\Omega^2$  se refiere a la métrica en la 2-esfera. Las expansiones en las direcciones normales se pueden definir como

$$\Theta_{\pm} = \frac{2}{r}\partial_{\pm}r, \quad (4.1.13)$$

Ya que el signo de  $\Theta_+\Theta_-$  es invariante, éste puede ser utilizado para distinguir el tipo de esfera en cuestión. Así, una esfera será atrapada, no-atrapada, o marginal si el producto  $\Theta_+\Theta_-$  es mayor, menor o igual que cero, respectivamente. Si la orientación se puede fijar localmente en una esfera no-atrapada como  $\Theta_+ > 0$  y  $\Theta_- < 0$ ,  $\partial_+$  y  $\partial_-$  estarán también fijadas como la dirección normal nula saliente y entrante, respectivamente (o el contrario si la orientación se considera  $\Theta_+ < 0$  y  $\Theta_- > 0$ ). Una esfera marginal con

$\Theta_+ = 0$ , es futura si  $\Theta_- < 0$ , pasada si  $\Theta_- > 0$  y bifurcante<sup>3</sup> si  $\Theta_- = 0$ . Esta esfera marginal será exterior si  $\partial_- \Theta_+ < 0$ , interior si  $\partial_- \Theta_+ > 0$  y degenerada si  $\partial_- \Theta_+ = 0$ . A una hipersuperficie foliada por esferas marginales se la conoce como horizonte atrapante y tiene la misma clasificación que las esferas marginales.

En espaciotiempos esféricamente simétricos, se puede formular una primera ley de la termodinámica unificada [27]. Para ello consideramos que la energía gravitatoria en espaciotiempos con esta simetría es la energía de Misner-Sharp [173] que puede ser definida como

$$E = \frac{1}{2}r(1 - \nabla^a r \nabla_a r) = \frac{r}{2}(1 - 2g^{+-}\partial_+ r \partial_- r). \quad (4.1.14)$$

Obviamente, esta expresión se reduce a  $E = r/2$  en un horizonte atrapado<sup>4</sup>.

Por otra parte, hay dos invariantes que se pueden construir a partir del tensor energía-momento que genera la geometría y que se expresan de una forma simple en estas coordenadas. Estos invariantes son

$$\omega = -g_{+-}T^{+-} \quad (4.1.15)$$

y el vector

$$\psi = T^{++}\partial_+ r \partial_+ + T^{--}\partial_- r \partial_-. \quad (4.1.16)$$

Con estas expresiones, podemos escribir la primera ley de la termodinámica unificada como

$$\partial_\pm E = A\psi_\pm + \omega\partial_\pm V, \quad (4.1.17)$$

donde  $A = 4\pi r^2$  es el área de las esferas de simetría, que es un invariante geométrico, y  $V = 4\pi r^3/3$  se define como el volumen correspondiente en un espaciotiempo plano, denominado por Hayward como volumen del área [27]. El primer término en el lado derecho de la ecuación podría ser interpretado como un término de suministro de energía, ya que este término produce un cambio en la energía del espaciotiempo debido al flujo de energía  $\psi$  generado por el material de los alrededores. El segundo término,  $\omega\partial_\pm V$ , se comporta como un término de trabajo, algo así como el trabajo que el contenido material debe hacer para mantener esta configuración.

Las ecuaciones de Einstein de interés, expresadas en términos de las coordenadas nulas [27], se pueden escribir usando las expansiones (4.1.13), como

$$\partial_\pm \Theta_\pm = -\frac{1}{2}\Theta_\pm^2 + \Theta_\pm \partial_\pm \ln(-g_{+-}) - 8\pi T_{\pm\pm}, \quad (4.1.18)$$

<sup>3</sup>Debe destacarse que si consideramos horizontes atrapantes de futuro (pasado) fijando  $\Theta_+ = 0$ , esto implicaría que  $\xi^-$  debe estar relacionada con la dirección nula normal entrante (saliente) ya que en estos horizontes se tiene  $\Theta_- < 0$  ( $\Theta_- > 0$ ). En la sección 4.4, en la que sólo nos referiremos a horizontes atrapantes pasados, fijaremos  $\Theta_- = 0$ , sin pérdida de generalidad, lo que implicará que  $\Theta_+ > 0$ , estando por tanto  $\xi^-$  relacionada con la dirección entrante.

<sup>4</sup>El lector interesado en las propiedades de  $E$  puede consultar [174].



$$\partial_{\pm}\Theta_{\mp} = -\Theta_{+}\Theta_{-} + \frac{1}{r^2}g_{+-} + 8\pi T_{+-}. \quad (4.1.19)$$

Por otra parte, Kodama [175] introdujo un vector  $k$  que puede ser comprendido como una generalización del vector de Killing temporal en espaciotiempos dinámicos y simétricamente esféricos, reduciéndose a él en el caso vacío<sup>5</sup>. Este vector se puede definir como

$$k = \text{rot}_2 r, \quad (4.1.20)$$

donde el subíndice 2 se refiere al espacio 2-dimensional normal a las esferas de simetría. En función de las coordenadas nulas,  $k$  puede expresarse como

$$k = -g^{+-}(\partial_+ r \partial_- - \partial_- r \partial_+), \quad (4.1.21)$$

donde la orientación de  $k$  se puede fijar de forma tal que en una región no-atrapada señale hacia el futuro.

A partir de la Eq. (4.1.14), se puede notar que la norma al cuadrado del vector Kodama puede expresarse como

$$||k||^2 = \frac{2E}{r} - 1. \quad (4.1.22)$$

Así, este vector proporciona una definición adicional para el horizonte atrapante: un horizonte atrapante sencillamente es una superficie en la que el vector de Kodama es nulo. Por lo tanto, como pasaba en el caso de espaciotiempos estáticos, donde una cierta frontera podía definirse como la hipersuperficie donde el vector Killing temporal es nulo, en el caso presente debemos usar, en su lugar, el vector Kodama. Este vector tiene algunas propiedades especiales<sup>6</sup> similares a las del vector Killing en espaciotiempos estáticos con límites [27], como

$$k^a \nabla_{[a} k_{b]} = \kappa \nabla_b r, \quad (4.1.23)$$

que, evaluada en el horizonte atrapante, implica

$$k^a \nabla_{[a} k_{b]} = \kappa k_b \text{ en un horizonte atrapante,} \quad (4.1.24)$$

donde los corchetes denotan antisimetrización en los índices indicados y

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{div}_2 \text{grad}_2 r. \quad (4.1.25)$$

---

<sup>5</sup>Debe destacarse que nos hemos referido al caso vacío y no al caso estático que es más general.

<sup>6</sup>En la Ref. [169] se estudian también otras propiedades interesantes de este vector.

Dada la similitud de la Eq. (4.1.24) con la correspondiente que involucra al vector Killing en el horizonte con su nombre<sup>7</sup>, a  $\kappa$  se la conoce como gravedad de superficie generalizada o geométrica. A partir de la definición de esta cantidad (4.1.25) y la clasificación de los horizontes atrapantes introducida al inicio de esta subsección, se puede ver que en un horizonte exterior, degenerado o interior se tiene  $\kappa > 0$ ,  $\kappa = 0$  y  $\kappa < 0$ , respectivamente. Por otro lado, en términos de las coordenadas nulas, la gravedad de superficie generalizada se expresa como

$$\kappa = g^{+-} \partial_- \partial_+ r. \quad (4.1.26)$$

El vector Kodama fue introducido inicialmente en este formalismo por Hayward como un análogo del vector de Killing temporal en espaciotiempos dinámicos y esféricamente simétricos. Este vector cobra incluso un interés mayor en el caso de agujeros de gusano, ya que los agujeros de gusanos estáticos, aunque poseen un vector Killing temporal, éste no se anula en ninguna parte, con lo que no se permite la definición de un horizonte Killing donde se pudiera considerar una gravedad de superficie. Sin embargo, como veremos, la definición de un vector Kodama o, equivalentemente, de un horizonte atrapante implica la existencia de una gravedad de superficie generalizada para agujeros de gusano, tanto estáticos como dinámicos.

Finalmente, la proyección de la Eq. (4.1.17) a lo largo del vector  $z$  que genera el horizonte atrapante implica

$$L_z E = \frac{\kappa L_z A}{8\pi} + \omega L_z V, \quad (4.1.27)$$

donde  $L_z = z \cdot \nabla$  y  $z = z^+ \partial_+ + z^- \partial_-$ . Esta expresión permite introducir una relación entre la entropía geométrica y el área de la superficie

$$S \propto A|_H. \quad (4.1.28)$$

## 4.2. Formalismo de Hayward aplicado a agujeros de gusano tipo Morris-Thorne.

El formalismo de Hayward fue introducido inicialmente para definir las propiedades de los agujeros negros reales en términos de cantidades medibles. De esta forma,

---

<sup>7</sup>Aunque en la ecuación que relaciona al vector Killing con la gravedad de superficie no aparece ninguna antisimetrización, dicha ecuación se podría escribir de forma equivalente con ella ya que, la propia definición de vector Killing implica  $\nabla_{(a} K_{b)} = 0$ , donde el paréntesis denota la simetrización de los índices involucrados y  $K$  al vector Killing.

se puede formular la termodinámica de los agujeros negros dinámicos recuperando, consistentemente, los resultados obtenidos mediante consideraciones globales usando el horizonte de sucesos en el caso estático de vacío [27]. Es en este sentido en el que este formalismo puede ser considerado como una generalización, ya que las cantidades locales tienen significado físico tanto en espaciotiempos estáticos como en dinámicos.

Una consecuencia curiosa aparece al considerar agujeros de gusano de Morris-Thorne ya que, mientras que en estos espaciotiempos no es posible obtener ninguna propiedad similar a las obtenidas en la física de los agujeros negros mediante el uso de consideraciones globales, al carecer de horizonte de sucesos, la consideración de cantidades locales evidencia características similares a las de los agujeros negros. Este hecho se puede entender de una forma más clara recordando que el agujero negro de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica de vacío y, por lo tanto, cualquier generalización de los agujeros negros se debe formular en presencia de materia. Es más, la extensión máxima del espacio de Schwarzschild [76] puede ser interpretada como un puente de Einstein-Rosen [92], que corresponde a un agujero de gusano de vacío y tiene asociada una termodinámica. Sin embargo, el puente de Einstein-Rosen no puede ser atravesado ya que tiene un horizonte y es inestable [96]. Si consideramos agujeros de gusano que puedan ser atravesados, estos espacios deberán contener algún tipo de sustancia incluso en el caso estático de Morris-Thorne. Así, la necesidad de una formulación en términos de cantidades locales, medibles por un observador con una vida finita, debe estar relacionada con la presencia de algún contenido material, en vez de con una evolución dinámica del espaciotiempo.

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos por Hayward para espaciotiempos simétricos al caso de agujeros de gusano estáticos, mostrando rigurosamente sus consecuencias [26], algunas de las cuales ya han sido sugeridas y/o indicadas por Ida y el mismo Hayward en la Ref. [176].

Para re-expresar la métrica (4.1.2) en la forma dada por la Eq. (4.1.12), consideramos una de las elecciones posibles de las coordenadas nulas, tomando  $\xi^+ = t + r_*$  y  $\xi^- = t - r_*$ , con  $r_*$  tal que  $dr/dr_* = \sqrt{-g_{00}/g_{rr}} = e^{\Phi(r)} \sqrt{1 - K(r)/r}$ , y  $\xi^+$  y  $\xi^-$  estando relacionadas con la dirección saliente y entrante, respectivamente. La aplicación de las definiciones introducidas en la sección anterior, implican que en  $r = r_0$  hay un horizonte atrapante bifurcante, que será exterior siempre que  $K'(r_0) < 1$  condición que, como hemos señalado en la subsección 4.1.1, siempre se cumple.

La energía de Misner-Sharp (4.1.14), la “densidad de energía” (4.1.15) y el “flujo de energía” (4.1.16) en este espacio son

$$E = \frac{K(r)}{2}, \quad (4.2.1)$$

$$\omega = \frac{\rho - p_r}{2}, \quad (4.2.2)$$

y

$$\psi = -\frac{(\rho + p_r)}{2} e^{-\Phi(r)} \sqrt{1 - K(r)/r} (-\partial_+ + \partial_-), \quad (4.2.3)$$

donde hemos tenido en cuenta que las componentes de un tensor energía-momento que toma la forma<sup>8</sup>  $T_{\mu\nu}^{(2)} = \text{diag}(\rho, p_r)$  en una base ortonormal, con el superíndice (2) denotando el espacio perpendicular a las esferas de simetría, son en la base considerada  $T_{\pm\pm} = e^{2\Phi(r)}(\rho + p_r)/4$  y  $T_{+-} = T_{-+} = e^{2\Phi(r)}(\rho - p_r)/4$ .

La energía de Misner-Sharp de este espacio alcanza el valor límite  $E = r/2$  sólo en la garganta,  $r = r_0$ , que es el horizonte atrapante, siendo menor que dicho límite en el resto del espacio no-atrapado. Queremos destacar que, al igual que en el caso de Sushkov [9] y Lobo [10], no se necesita ninguna información sobre las componentes transversales de la presión. Ahora, derivando la Eq. (4.2.1) y subiendo los índices de la Eq. (4.2.3), se tiene

$$\partial_{\pm} E = \pm 2\pi r^2 \rho e^{\Phi} \sqrt{1 - K(r)/r} \quad (4.2.4)$$

y

$$\psi_{\pm} = \pm e^{\Phi(r)} \sqrt{1 - K(r)/r} \frac{\rho + p_r}{4}, \quad (4.2.5)$$

con lo que tenemos todos los términos<sup>9</sup> de la Eq. (4.1.17), siendo todos ellos nulos en la garganta, lo que era de esperar al estar considerando un agujero de gusano sin evolución dinámica. Sin embargo, la comparación de los términos involucrados en la Eq. (4.1.17) en el caso de los agujeros de gusano Morris-Thorne con los que aparecerían en el caso de un agujero negro de Schwarzschild nos podría dar un conocimiento más profundo de este espaciotiempo basado en las propiedades exóticas de su contenido material. Por supuesto, la métrica de Schwarzschild es una solución de vacío, pero cabría esperar que ésta fuera una buena aproximación en presencia de pequeñas cantidades de materia que consideraremos ordinaria. Así, en primer lugar, debemos señalar que la variación de la energía gravitatoria, Eq. (4.2.4), será positiva en la dirección saliente y negativa en la entrante en ambos casos<sup>10</sup>, ya que  $\rho > 0$ . Por lo tanto, esta variación será positiva sea o no la materia exótica. Por otra parte la “densidad de energía”,  $\omega$ , que sería positiva en el caso en el que la geometría estuviera generada por materia ordinaria, lo seguiría siendo ante violaciones de la condición de energía nula. La diferencia crucial

<sup>8</sup>Como comentaremos en la próxima sección, este tensor energía-momento es de tipo I en la notación de Hawking-Ellis [3].

<sup>9</sup>Los demás se pueden obtener de forma trivial teniendo en cuenta que  $\partial_{\pm} r = \pm \frac{1}{2} e^{\Phi(r)} \sqrt{1 - K(r)/r}$ .

<sup>10</sup>El factor  $e^{\Phi} \sqrt{1 - K(r)/r} \equiv \alpha$  que aparece explícitamente debido a la consideración de esta solución particular, viene de la cantidad  $\alpha = \sqrt{-g_{00}/g_{rr}}$  que es un factor general en casos estáticos y esféricamente simétricos; por lo tanto  $\alpha$  tiene el mismo signo en ambos casos tanto en la Eq. (4.2.4) como en (4.2.5).

se encontraría al considerar el término de “suministro de energía”, ya que el flujo de energía depende del signo de  $\rho + p_r$ ; por lo tanto, mientras que en el caso de materia ordinaria éste podría ser interpretado en términos de un fluido que “da” energía al espaciotiempo, la materia exótica “recibe” o “toma” energía del espaciotiempo. Esta “extracción de energía” inducida por el término de flujo en el caso de los agujeros de gusano, no podría llegar a ser tan grande como para cambiar el signo de la variación de energía.

Por otro lado el espaciotiempo (4.1.2) posee un vector Killing que no se anula en ninguna parte, por lo que no tendría sentido intentar calcular una gravedad de superficie como la considerada por Gibbons y Hawking [123] en el caso de horizontes Killing. Sin embargo, la simetría esférica nos permite considerar al vector Kodama, cuyas componentes son

$$k^\pm = e^{-\Phi(r)} \sqrt{1 - K(r)/r}, \quad (4.2.6)$$

con  $\|k\|^2 = -1 + K(r)/r = 0$  en la garganta. La gravedad de superficie generalizada, (4.1.26), es

$$\kappa|_H = \frac{1 - K'(r_0)}{4r_0}, \quad (4.2.7)$$

donde “ $|_H$ ” significa evaluación en el horizonte. Se puede ver que, ya que la garganta es un horizonte atrapante exterior,  $K'(r_0) < 1$ , que no es más que la condición de extensión hacia afuera, incluida en la subsección 4.1.1, necesaria para la existencia de un agujero de gusano. Mediante las ecuaciones de Einstein (4.1.9) y (4.1.10),  $\kappa$  puede ser re-expresada como

$$\kappa|_H = -2\pi r_0 [\rho(r_0) + p(r_0)], \quad (4.2.8)$$

donde, como hemos mencionado en la subsección 4.1.1, necesariamente  $\rho(r_0) + p(r_0) < 0$ .

Cuando la gravedad de superficie se define a partir del vector Killing temporal, esta cantidad se puede entender como la fuerza que actúa en una partícula de prueba en un campo gravitatorio. La gravedad de superficie generalizada se define a partir del uso del vector de Kodama, pudiendo ser éste interpretado como un flujo privilegiado de tiempo para observadores a radio constante cuya carga Nöther asociada es la  $E$  [169], que se reduce al vector de Killing en el caso de vacío en el que la gravedad de superficie recupera su significado usual. Sin embargo, en el caso de agujeros de gusano esféricamente simétricos y estáticos, ambos vectores pueden ser definidos, teniendo el vector Kodama mayor interés al anularse su norma en una superficie privilegiada. Es más, en espaciotiempos dinámicos sólo este vector podría ser definido. Por lo tanto, podemos sospechar que la gravedad de superficie generalizada originaría algún efecto en una partícula de prueba con un significado más general que una fuerza, reduciéndose a ésta en el vacío. Por otra parte, si algún tipo de simetría pudiera anular este efecto

en una partícula de prueba, deberíamos pensar que el mismo efecto produciría que el horizonte atrapante fuera degenerado.

### 4.3. Agujeros de gusano dinámicos

La existencia de una gravedad de superficie generalizada que aparece en el primer término del lado derecho de la Eq. (4.1.27) multiplicando a una cantidad que se puede identificar como proporcional a la entropía, sugeriría la posible formulación de una termodinámica de los agujeros de gusano, como ya fuera comentado en la Ref. [170]. Sin embargo, se debe considerar una definición más precisa de su horizonte atrapante exterior para poder obtener sus características asociadas. Con este propósito, resumiremos los resultados sobre el crecimiento del área de los agujeros negros que pueden ser extraídos mediante el formalismo de Hayward [28], comparándolos con los derivados al considerar el método de acreción [14; 15]; dicha comparación podrá proporcionarnos información adicional en el caso de los agujeros de gusano.

En primer lugar, el área de superficie se puede expresar en función de  $\mu$  como  $A = \int_S \mu$ , con  $\mu = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  en el caso esféricamente simétrico. Por lo tanto, la evolución del área del horizonte atrapante se puede estudiar considerando

$$L_z A = \int_s \mu (z^+ \Theta_+ + z^- \Theta_-), \quad (4.3.1)$$

con  $z$  el vector que lo genera.

Por otra parte, a partir de la definición de horizonte atrapante podemos fijar  $\Theta_+|_H = 0$ , lo que nos proporciona la ecuación fundamental para su evolución

$$L_z \Theta_+|_H = [z^+ \partial_+ \Theta_+ + z^- \partial_- \Theta_+]|_H = 0. \quad (4.3.2)$$

También se debe destacar que la evaluación de la Eq. (4.1.18) en el horizonte atrapante produce

$$\partial_+ \Theta_+|_H = -8\pi T_{++}|_H, \quad (4.3.3)$$

con  $T_{++} \propto \rho + p_r$  al considerar un tensor energía-momento de tipo I según la clasificación de Hawking-Ellis<sup>11</sup>. [3]. Por lo tanto, si la materia que genera la geometría es ordinaria, se tiene que  $\partial_+ \Theta_+|_H < 0$ , siendo  $\partial_+ \Theta_+|_H > 0$  si se viola la condición de energía nula.

---

<sup>11</sup>En general se tendría  $T_{++} \propto T_{00} + T_{11} - 2T_{01}$ , donde las componentes del tensor energía-momento del lado derecho están expresadas con respecto a una base ortonormal. En nuestro caso, consideramos un tensor energía momento de tipo I [3], no sólo porque éste represente a todos los campos observados con una masa en reposo no-nula y nula, exceptuando ciertos casos especiales descritos por el tipo II, sino porque si no fuera así tendríamos  $T_{++} = 0$  (para los tipos II y III) lo que no produciría ninguna dinámica del horizonte, o estaríamos considerando el caso en el que la densidad de energía es nula (tipo IV).

Así, caracterizar a los agujeros negros mediante la presencia de un horizonte atrapante exterior futuro implica el crecimiento de su área, siempre que el contenido material cumpla la condición de energía nula [28]. Esto puede verse fácilmente teniendo en cuenta la definición de horizonte atrapante exterior y notando que, cuando ésta se introduce en la condición (4.3.2), junto con la Eq. (4.3.3) para materia ordinaria, implica que el signo de  $z^+$  y  $z^-$  debe ser distinto, es decir, el horizonte debe ser de tipo espacio al considerar materia ordinaria y nulo en el vacío. Esto conlleva a que la evaluación de  $L_z A$  en  $\Theta_+ = 0$ , teniendo en cuenta que el horizonte es futuro y que  $z$  tiene una componente positiva a lo largo de la dirección que señala hacia el futuro,  $z^+ > 0$ , implique<sup>12</sup>  $L_z A \geq 0$ , cumpliéndose la igualdad en el vacío. Se debe destacar que si hubiéramos considerado la acreción de materia exótica, este argumento implicaría que el área del agujero negro debe decrecer.

Estos resultados sobre la evolución de los agujeros negros en un entorno de materia ordinaria o exótica no deberían sorprendernos ya que, como se ha estudiado en el Capítulo 2, la acreción de energía con  $p + \rho < 0$  ( $p + \rho > 0$ ), donde  $p$  podría identificarse en este caso con  $p_r$ , produce inevitablemente el decrecimiento (crecimiento) de los agujeros negros [14; 15]. Por lo tanto, parece lógico considerar que ambos métodos están de hecho estudiando el mismo proceso originado por un flujo de energía en la dirección del agujero.

Por otra parte, mientras que la caracterización de los agujeros negros hecha por Hayward aparece en este estudio como una consideración natural, todavía existirían dudas sobre la consideración del tipo de horizontes atrapantes exteriores que deberían caracterizar a los agujeros de gusano. Siguiendo los mismos pasos que en el argumento relativo a los agujeros negros, se puede ver que, ya que el escenario natural de los agujeros de gusano es exótico, el horizonte de estos será temporal, permitiendo, por lo tanto, que sea atravesado en ambas direcciones. Sin embargo, si este horizonte fuera futuro (pasado), la Eq. (4.3.1) implicaría que este horizonte debería decrecer (crecer) al ser considerado en su entorno exótico natural, permaneciendo constante en el caso estático en el que, como hemos visto en la sección anterior, dicho horizonte es bifurcante. De esta forma, habría una ambigüedad aparente en la caracterización de los agujeros de gusano dinámicos.

No obstante, considerando que este método describe el mismo proceso de acreción estudiado en el Capítulo 2, es decir, la acreción de energía por un agujero de gusano, podemos recordar que este estudio, en el que incluso se tenía en cuenta la retro-reacción de la geometría [18], implica que el área del agujero de gusano debe crecer (decrecer)

---

<sup>12</sup>En el caso de los agujeros blancos, éstos están caracterizadas por un horizonte atrapante exterior de pasado, por lo que  $L_z A \leq 0$ .

al acretar energía que viola la condición de energía nula (que la cumple). Este hecho nos permite ir más allá de la ambigüedad aparente mencionada, caracterizando a los agujeros de gusano mediante horizontes atrapantes exteriores pasados. Esta caracterización unívoca podía sospecharse desde el principio ya que si la energía que genera a los agujeros de gusano debe violar la condición de energía nula, parece razonable que su garganta crezca si ésta acreta cierta cantidad de energía de este tipo.

Para entender este hecho podríamos pensar que mientras los agujeros negros evolucionarían hacia una situación estática en el futuro, siendo su horizonte atrapante futuro, los agujeros blancos, que se consideran nacidos en un estado estático del que más tarde evolucionan, están caracterizados por un horizonte atrapante pasado. Así, en el caso de los agujeros de gusano se podría considerar una situación en la que nacieran en un momento dado, en el origen del universo, creados por una civilización superior o cualquier otro escenario, evolucionando después. Por lo tanto, este argumento parecería consistente con un horizonte atrapante de pasado.

Esta conclusión también estaría de acuerdo con la idea de que la energía fantasma podría ser tratada de forma equivalente a la energía ordinaria yendo hacia atrás en el tiempo, lo que en cierto modo implicaría que el espaciotiempo de los agujeros de gusano generado por energía fantasma podría considerarse semejante físicamente al de un agujero negro con energía ordinaria bajo inversión temporal. Si este fuera el caso, el horizonte atrapante pasaría de ser pasado a futuro mediante dicha inversión. En este argumento estamos considerando agujeros negros dinámicos en presencia de materia, ya que la consideración de agujeros en el vacío produce una situación estática e invariante, por lo tanto, bajo inversión temporal. Los agujeros negros de vacío deberían compararse con los agujeros de gusano de vacío que no permiten viajar a través de ellos, siendo estos también invariantes bajo dicha inversión. En particular, y ya que estamos considerando simetría esférica, estos agujeros de gusano de vacío no serían más que la consideración del espacio extendido de Schwarzschild, pudiéndoseles atribuir por tanto las mismas propiedades sin necesidad de realizar ninguna inversión.

Finalmente, teniendo en cuenta la proporcionalidad expresada en (4.1.28), podemos ver como la evolución de un agujero de gusano, considerado en su entorno exótico natural, implica  $L_z S \geq 0$ , cumpliéndose la igualdad sólo en el caso estático en el que su horizonte es bifurcante.



## 4.4. Radiación y termodinámica de los agujeros de gusano

La existencia de una gravedad de superficie generalizada no nula en la garganta del agujero de gusano parece implicar que éste podría estar caracterizado por una temperatura, lo que haría esperable que los agujeros de gusano emitieran radiación térmica. Aunque estamos considerando agujeros de gusano que pueden ser atravesados por cualquier tipo de materia o radiación para ir de una región a otra o de un universo a otro, a lo que nos referimos ahora es a un proceso de radiación totalmente distinto a esta transferencia ordinaria, que no sea debido a cierta radiación recorriendo el camino clásicamente permitido por la relatividad general sino a radiación térmica con un origen cuántico. Por lo tanto, incluso en el caso en el que ningún tipo de materia ni radiación viajara clásicamente a través del agujero de gusano, la existencia de un horizonte atrapante podría producir una radiación térmica de naturaleza semi-clásica.

Ya ha sido mostrado en la Ref. [177] como la aplicación del método de túnel de Hamilton-Jacobi produce una temperatura de tipo Hawking local en el caso de los agujeros negros simétricamente esféricos. Sin embargo, también en la Ref. [177] se sugiere que en el caso de horizontes atrapantes exteriores pasados, la aplicación de este método podría dar lugar a temperaturas negativas que, por lo tanto, podrían carecer de un significado físico bien definido.

En esta sección, calculamos explícitamente la temperatura asociado con horizontes atrapantes exteriores de pasado, que, como hemos visto, caracterizan a los agujeros de gusano, utilizando el método desarrollado en la Ref. [177]. Veremos como la aplicación rigurosa de este método conlleva, la aparición de una temperatura negativa para el horizonte del agujero de gusano. Este resultado, lejos de carecer de un significado físico bien definido, puede ser interpretado de forma inmediata teniendo en cuenta que, como es bien conocido [29; 30], la energía fantasma posee también una temperatura negativa.

Para este propósito consideramos un agujero de gusano dinámico y esféricamente simétrico general que, por lo tanto, estará descrito mediante la métrica (4.1.12), con un horizonte atrapante caracterizado por  $\Theta_- = 0$  y<sup>13</sup>  $\Theta_+ > 0$ . La métrica (4.1.12) puede ser expresada en términos de las coordenadas de Eddington-Finkelstein generalizadas retardadas como

$$ds^2 = -e^{2\Psi} C du^2 - 2e^\Psi du dr + r^2 d\Omega^2, \quad (4.4.1)$$

donde se ha realizado la transformación  $du = d\xi^-$  y  $d\xi^+ = \partial_u \xi^+ du + \partial_r \xi^+ dr$ , y  $\Psi$  expresa la libertad gauge en la elección de la coordenada nula  $u$ . Ya que  $\partial_r \xi^+ > 0$ , hemos

---

<sup>13</sup>Con esta consideración simplemente estamos fijando la dirección saliente como  $\partial_+$  y la entrante como  $\partial_-$ .

considerado  $e^\Psi = -g_{+-}\partial_r\xi^+ > 0$  y  $e^{2\Psi}C = -2g_{+-}\partial_u\xi^+$ . Se puede ver que  $C = 1 - 2E/r$ , donde  $E$  fue definida en la Eq. (4.1.14). El uso de las coordenadas retardadas nos asegura que las superficies marginales, para las que  $C = 0$ , son marginales pasadas.

A partir de las Eqs. (4.1.20) y (4.1.25) se puede ver que la gravedad de superficie en el horizonte y el vector Kodama son

$$\kappa|_H = \frac{\partial_r C}{2} \quad (4.4.2)$$

y

$$k = e^{-\Psi}\partial_u. \quad (4.4.3)$$

Ahora, de forma similar a como se procede en la Ref. [177] para el caso de los agujeros negros, en los agujeros de gusano consideramos un campo escalar sin masa en la aproximación eikonal dado por  $\phi = \phi_0 \exp(iI)$ , con una amplitud que varía lentamente y una acción que lo hace de forma rápida dada por

$$I = \int \omega_\phi e^\Psi du - \int k_\phi dr, \quad (4.4.4)$$

donde  $\omega_\phi$  es un parámetro de energía asociado con la radiación. En nuestro caso, este campo describe radiación saliente ya que la radiación entrante requeriría el uso de coordenadas avanzadas. Por otra parte, la ecuación de onda del campo que, como acabamos de mencionar, cumple la ecuación eikonal, implica la ecuación de Hamilton-Jacobi<sup>14</sup>

$$\gamma^{ab}\nabla_a I \nabla_b I = 0, \quad (4.4.5)$$

con  $\gamma^{ab}$  la métrica en el 2-espacio perpendicular a las esferas de simetría. Ahora, teniendo en cuenta  $\partial_u I = e^\Psi \omega_\phi$  y  $\partial_r I = -k$ , la Eq. (4.4.5) produce

$$k_\phi^2 C + 2\omega_\phi k_\phi = 0. \quad (4.4.6)$$

Una solución de esta ecuación es  $k_\phi = 0$ , que debe corresponder a modos salientes ya que estamos considerando que  $\phi$  es saliente. Por lo tanto, la otra solución,  $k_\phi = -2\omega_\phi/C < 0$ , debe corresponder a modos entrantes y producirá un polo en la integral de acción 4.4.4, ya que  $C$  se anula en el horizonte.  $C$  puede expandirse en las cercanías del horizonte, expresándose la segunda solución en este régimen como  $k_\phi \approx -\omega_\phi/[\kappa|_H(r - r_0)]$ . Por lo tanto, la contribución imaginaria de la acción se puede obtener deformando el contorno de integración en el semi-plano inferior de  $r$ ; siguiendo este procedimiento se obtiene

$$\text{Im}(I)|_H = -\frac{\pi\omega_\phi}{\kappa|_H}. \quad (4.4.7)$$

---

<sup>14</sup>Para una mejor comprensión de las aproximaciones comúnmente utilizadas en este método, como la eikonal, puede consultarse, por ejemplo, la Ref. [178].

que puede ser utilizada para considerar la tasa de producción de partículas dada por aproximación WKB del efecto túnel  $\Gamma$  a lo largo de una trayectoria clásicamente prohibida

$$\Gamma \propto \exp[-2\text{Im}(I)]. \quad (4.4.8)$$

Aunque la garganta de un agujero de gusano es una trayectoria clásicamente permitida, podemos considerar que la existencia de un horizonte atrapante abre la posibilidad de un fenómeno de traversabilidad adicional a través del agujero de gusano de naturaleza cuántica. Podría pensarse que esta radiación adicional estaría basada en algún tipo de efecto túnel entre los dos universos (o las dos regiones del mismo universo), un proceso que, por supuesto, está prohibido clásicamente. Si aceptamos una interpretación de este tipo, (4.4.8) tendrá en cuenta la probabilidad de la tasa de producción de partículas en el horizonte atrapante inducida por algún efecto cuántico, o al menos semi-clásico. Por otro lado, considerando que esta probabilidad tiene una forma térmica  $\Gamma \propto \exp(-\omega_\phi/T_H)$ , podremos calcular la temperatura de la radiación térmica mediante

$$T = -\frac{\kappa|_H}{2\pi}, \quad (4.4.9)$$

que es negativa. A primera vista, se podría pensar que nos encontramos a salvo de esta temperatura ya que está relacionada con los modos entrantes. Sin embargo, este no sería el caso ya que, incluso si los modos fueran entrantes, estos caracterizan la temperatura del horizonte. Es más, la radiación que entrase por una de las bocas saldría por la otra al pasar por la trayectoria clásicamente permitida, apareciendo por lo tanto en la otra región del universo (o en el otro universo), sucediendo dicho proceso en ambas bocas y produciendo, finalmente, una radiación saliente de ambas bocas con temperatura negativa.

Sin embargo, se debe recordar que la energía fantasma, que no es más que un caso particular de materia exótica, está caracterizada por una temperatura negativa [29; 30] lo que, lejos de sugerir que el resultado obtenido pudiera carecer de un significado físico bien definido, nos corrobora la consistencia del método utilizado, ya que uno debería esperar que los agujeros de gusano radiasen el mismo tipo de energía que la sustancia que los genera, como ocurre con los agujeros negros dinámicos y la materia ordinaria, con temperatura positiva.

Ahora, teniendo en cuenta la temperatura expresada en (4.4.9), la Eq. (4.1.27) se puede re-escribir de la siguiente forma en el horizonte atrapado

$$L_z E = -T L_z S + \omega L_z V, \quad (4.4.10)$$

definiendo así de forma unívoca la entropía geométrica en el horizonte atrapante como

$$S = \frac{A|_H}{4}. \quad (4.4.11)$$

El signo negativo que aparece en el primer término del lado derecho de la Eq. (4.4.10) estaría de acuerdo con la consideración hecha en la sección 4.2 sobre que la materia exótica que genera este espaciotiempo “roba” energía del mismo. Siguiendo esta línea de razonamiento podemos formular la primera ley de la termodinámica de los agujeros de gusano como:

*Primera ley: El cambio en la energía gravitatoria de un agujero de gusano es igual a la suma de la energía sacada de esta geometría más el trabajo realizado en la misma.*

Esta primera ley se puede interpretar considerando que la materia exótica es responsable de ambos procesos, la extracción de energía y el trabajo realizado, cuyo balance da lugar a una variación total positiva de la energía gravitatoria.

Por otra parte, como hemos señalado en la sección 4.3,  $L_z A \geq 0$  en un escenario exótico, implicando  $L_z S \geq 0$  por medio de la Eq. (4.4.11), saturándose ambas desigualdades en el caso estático. Así, considerando que un agujero de gusano cosmológico real debe encontrarse siempre en un entorno exótico, podemos formular la segunda ley de la termodinámica como:

*Segunda ley: La entropía de un agujero de gusano dinámico está dada por el área de su superficie, que es creciente siempre que este agujero acrete material exótico.*

Aun más, la definición planteada en la sección 4.3 implica que un agujero de gusano debe estar caracterizado por un horizonte atrapante exterior pasado lo que, en términos de la gravedad de superficie, se traduce en  $\kappa > 0$ . De esta forma, será posible formular una tercera ley de la termodinámica que dicte:

*Tercera ley (primera formulación): Es imposible alcanzar el cero absoluto de la gravedad de superficie por medio de ningún proceso dinámico en un agujero de gusano.*

Debe ser señalado que si existiera algún proceso dinámico que pudiera cambiar la propiedad exterior del horizonte atrapante de forma tal que éste pasara a ser interior o degenerado, el agujero de gusano se convertiría por el mismo proceso en un objeto físico diferente y, por lo tanto, deberíamos referirnos a las leyes termodinámicas de dicho objeto y no a las aquí presentadas. Siguiendo este mismo argumento, podemos notar que siempre que tengamos un agujero de gusano, que por lo tanto tendrá  $\kappa$  no nula, su horizonte atrapante estará caracterizado por una temperatura que, según nuestros argumentos, debe ser negativa. De esta forma, podríamos re-formular la tercera ley de la termodinámica como:

*Tercera ley (segunda formulación): Es imposible alcanzar el cero absoluto de la temperatura por medio de ningún proceso dinámico en un agujero de gusano.*

Se debe mencionar que si cambiáramos la energía de fondo de materia exótica a

ordinaria, la naturaleza causal del horizonte atrapante exterior cambiaría<sup>15</sup> [170]. Es más, podríamos considerar que por causa del mismo proceso, o de otro subsecuente, un horizonte atrapante exterior pasado (un agujero de gusano) podría convertirse en uno futuro (agujero negro), y viceversa. Si este proceso de conversión fuera posible, se esperaría que la temperatura cambiara su signo de negativa (agujero de gusano) a positiva (agujero negro) de una forma que debe ser necesariamente discontinua ya que ninguno de los dos objetos está caracterizado por un horizonte atrapante degenerado.

Por otra parte, como ya hemos sugerido, podría ser que la energía fantasma pudiera ser tratada en cierto modo como materia ordinaria propagándose hacia atrás en el tiempo, al menos en los correspondientes casos dinámicos. También se debe notar que la métrica (4.4.1) bajo una inversión temporal no es más que el elemento de línea en las coordenadas avanzadas, necesario para estudiar la radiación de los agujeros negros [177]. En este sentido, se podría sugerir como una interpretación tentativa de este resultado que sólo las cantidades fundamentales, como la entropía, deberían ser invariantes bajo inversiones de este tipo, cambiando otras cantidades como la temperatura su signo. Para comprobar esta posible similitud y por su interés intrínseco, consideramos necesario comparar las leyes anteriormente formuladas con las correspondientes a los agujeros negros. Así, podemos notar que la primera ley de la termodinámica de los agujeros de gusano se convertiría en la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros bajo una inversión temporal con las implicaciones sugeridas, cambiando de signo el término de intercambio de energía en la Eq. (4.4.10) debido a que los agujeros negros emiten radiación a temperatura positiva. La segunda ley permanecería invariante ya que la variación del área del horizonte, y con ella de la entropía, es equivalente si consideramos horizontes atrapantes exteriores pasados rodeados de materia exótica y horizontes atrapantes exteriores futuros en un ambiente de materia ordinaria. Por último, las dos formulaciones que hemos indicado para la tercera ley de la termodinámica de los agujeros de gusano serían las mismas en el caso de los agujeros negros, aunque se debe destacar que en la segunda formulación uno debería considerar que la temperatura toma sólo valores negativos o positivos, respectivamente.

## 4.5. Comentarios.

En este capítulo hemos aplicado en primer lugar los resultados provenientes de la primera ley de la termodinámica generalizada [27] y la existencia de una gravedad de superficie generalizada [27; 176] al caso de los agujeros de gusano de Morris-Thorne

---

<sup>15</sup>Este hecho se puede deducir viendo que el contenido material, junto con la propiedad exterior del horizonte, fija el signo relativo de  $z^+$  y  $z^-$  a través de la Eq. (4.3.2).

[101], donde el horizonte atrapante es exterior y bifurcante. Ya que este caso corresponde a soluciones estáticas, recuperamos, consistentemente, que no es posible obtener ninguna evolución de la garganta. Sin embargo, la comparación de las cantidades involucradas (como la variación de la energía gravitatoria y los términos de intercambio de energía y trabajo) con las que aparecerían en el caso de un agujero negro estático en un entorno de materia ordinaria, que puede ser descrito aproximadamente por medio de la solución de Schwarzschild siempre que la densidad de energía sea pequeña, nos proporciona cierta información útil sobre la naturaleza de este espaciotiempo y, con ella, sobre la materia que lo genera. Es más, suponiendo que estas cantidades no cambian el signo que presentan en la región exterior del horizonte, donde no son nulas, al considerar los correspondientes casos dinámicos, podemos pensar que estos signos serán los que presenten las cantidades correspondientes de las soluciones dinámicas también en el horizonte. Así podríamos pensar que la variación de la energía gravitatoria y del término de “trabajo” (el cual podría ser interpretado como el trabajo realizado por el contenido material para mantener la geometría) tienen el mismo signo en espaciotiempos dinámicos y esféricamente simétricos generados por materia ordinaria y exótica. Sin embargo, el término de “intercambio de energía” sería positivo en agujeros negros dinámicos en un entorno de materia ordinaria (suministro de energía) y negativo para agujeros de gusano dinámicos en su entorno exótico, (extracción de energía).

Este estudio nos ha permitido comprobar como el vector Kodama, que permite la introducción de una gravedad de superficie generalizada en espaciotiempos esféricamente simétricos [27], no sólo debe ser considerado en soluciones dinámicas, sino que puede jugar un papel fundamental en el caso más general de soluciones que no sean de vacío. De hecho, mientras que el vector Kodama se reduce al vector Killing temporal en la solución esféricamente simétrica de vacío [27], esta reducción no aparece en el caso esféricamente simétrico y estático de no vacío descrito por la solución de Morris-Thorne, siendo esta rotura de la equivalencia un ingrediente fundamental para estos espacios ya que no poseen un horizonte Killing (dado que la norma de este vector no se anula en dicho espacio) pero sí un horizonte atrapante no degenerado. Así, en los agujeros de gusano de Morris-Thorne, es posible definir una gravedad de superficie generalizada basada en conceptos locales teniendo, por tanto, consecuencias observables.

Por otra parte, más allá de la solución estática de Morris-Thorne, hemos estudiado ciertas propiedades de los agujeros de gusano dinámicos sin la suposición de ningún tipo particular de métrica, para lo que hemos debido determinar de forma unívoca el tipo de horizonte atrapante exterior que aparece en estos espacios. Para realizar dicha determinación hemos tenido en cuenta que los resultados obtenidos por la aplicación del formalismo de Hayward al caso de los agujeros negros dinámicos [28] son los mismos que se derivan de la consideración del proceso de acreción de energía oscura en agujeros

negros [14; 15], por lo que hemos considerado que ambos métodos describen en realidad el mismo fenómeno producido por un flujo de energía entrante en el agujero. Cuando esta consideración es aplicada al caso de los agujeros de gusano, ésta implica que dichos objetos deben ser caracterizados en términos de horizontes atrapantes exteriores de pasado [25; 26].

La caracterización unívoca de los agujeros de gusano no sólo implica que el área, y con ella la entropía, de los agujeros de gusano dinámicos crece si no hay cambios en la exotividad del material total contenido en el espacio (segunda ley de la termodinámica de los agujeros de gusano), sino que los agujeros de gusano radian energía. Los resultados provenientes del estudio de la termodinámica de los agujeros de gusano [29; 30], nos permiten interpretar esta posible radiación a temperatura negativa con un significado físico bien definido. Así, los agujeros de gusano emiten radiación del mismo tipo que la materia que los genera, como ya ocurría en el caso de la evaporación de los agujeros negros dinámicos respecto a la materia ordinaria [25; 26].

De esta forma, hemos podido re-interpretar la primera ley de la termodinámica generalizada formulada por Hayward [27] en el caso de los agujeros de gusano, destacando que en dicho caso el cambio de energía gravitatoria del horizonte atrapante del agujero es igual a la suma de la energía extraída del agujero de gusano más el término de trabajo realizado en éste (primera ley de la termodinámica de los agujeros de gusano), siendo, por otro lado, este resultado consistente con los comentarios mencionados a partir de la suposición de la conservación del signo de estas cantidades en un caso dinámico general con respecto a las correspondientes en el espaciotiempo de Morris-Thorne exterior a la garganta.

En lo relativo a la tercera ley de la termodinámica queremos recalcar que la no accesibilidad del cero de la gravedad de superficie generalizada, y con ella de la temperatura, es un resultado directamente implicado por el hecho de que el horizonte atrapante no es degenerado. Así, si algún tipo de proceso fuera capaz de cambiar la propiedad exterior del horizonte, ya no nos encontraríamos en presencia de un agujero de gusano.

A primera vista, los resultados obtenidos para la radiación de energía fantasma por agujeros de gusano podrían indicar un proceso que permitiera localizar a estos objetos en nuestro entorno midiendo las inhomogeneidades que originaría esta radiación fantasma, de forma similar a como se pensó originalmente con la radiación Hawking [123]. Sin embargo, esperamos que en este caso la radiación producida sea de intensidad tan pequeña como la que originarían los agujeros negros, no encontrándonos, por lo tanto, en posesión de instrumentos hipotéticos lo suficientemente precisos y sensibles como para detectar las inhomogeneidades y anisotropías provenientes de la radiación

de agujeros negros y de gusano de tamaños moderados.

Queremos destacar que, como ocurriera en el caso de los agujeros negros, el proceso de radiación de energía fantasma por los agujeros de gusano debería originar una disminución de su área, y con ella de su entropía. Sin embargo, esperamos que esta violación de la segunda ley de la termodinámica de los agujeros de gusano sea sólo aparente, ya que es la entropía total del universo, compuesto por el agujero de gusano y la materia exótica de sus alrededores, la que debería crecer.

Merece la pena comentar que en el estudio del proceso de radiación existe un ambigüedad al realizar la integral de la acción, dependiendo del semi-plano de  $r$  que se elija para deformar el contorno de integración. Esta ambigüedad puede asociarse a la elección de las condiciones de contorno. De esta forma, si hubiéramos elegido la otra deformación posible, habríamos obtenido una temperatura positiva para el horizonte atrapante del agujero de gusano. La suposición de esta segunda solución como la físicamente consistente implicaría que el proceso de acreción estaría siempre entrópicamente favorecido ante el proceso de emisión, al poseer la energía del espacio una temperatura negativa [29; 30], siendo, por lo tanto, “más caliente” que cualquier temperatura positiva. Aunque esta posibilidad debe ser mencionada, en nuestro caso consideramos que las condiciones de contorno, en las que se debería tener en cuenta el signo de la temperatura de la materia que origina la geometría, implicaría que el horizonte debe estar caracterizado por una temperatura del mismo signo. Sin embargo, sería de gran interés la posible confirmación de este resultado mediante un estudio alternativo en el que dicha ambigüedad no estuviera presente.

Por otro lado, consideramos de interés comentar brevemente ciertos resultados presentados después de la realización de los trabajos en los que está basado el presente capítulo [25; 26], ya que tales resultados podrían clarificar algunas de las consideraciones adoptadas por nosotros. En primer lugar, en un trabajo de Hayward [171], que salió a la luz durante el proceso de publicación de los trabajos mencionados, se discutieron parte de las conclusiones aquí extraídas siguiendo un razonamiento parcialmente similar aunque divergente en ciertos puntos cruciales. En este trabajo [171], el autor estudia la termodinámica de dos tipos de agujeros de gusano dinámicos, caracterizados por horizontes atrapantes exteriores de pasado y futuro. Aunque estos dos tipos, desde nuestro punto de vista, son soluciones matemáticas completamente consistentes, nosotros nos hemos concentrado en el primero de ellos al que consideramos el único físicamente consistente. Una de las razones que apoyan esta afirmación ha sido ya comentada en detalle en la sección 4.3, y está basada en la equivalencia entre el formalismo utilizado y el método de acreción. Por otra parte, un agujero de gusano susceptible de ser atravesado debe estar generado por materia exótica y es bien cono-



cido que su garganta podría estrangularse debido a la acreción de energía ordinaria, lo que presenta precisamente el problema de cómo atravesar un agujero de gusano de forma segura e implica la necesaria estabilización de éste mediante materia exótica para evitar la muerte del viajero. Si los agujeros de gusano físicos pudieran estar caracterizados por horizontes atrapantes exteriores de futuro, por las Eqs. (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3), esto implicaría que este horizonte crecería (decrecería) debido a la acreción de materia ordinaria (exótica) y, por lo tanto, no habría ningún problema en atravesarlo, ya que incluso aumentaría de tamaño cuando un viajero pasara a través de él, lo que es contrario a lo que se espera de las bases físicas que definen a los agujeros de gusano [100; 101].

En segundo lugar, en la Ref. [179], Di Criscienzo, Hayward, Nadalini, Vanzo y Zerbinì muestran la solidez del método utilizado en la Ref. [177] para estudiar la temperatura de la radiación de los agujeros negros dinámicos, que nosotros hemos considerado válido y hemos adaptado en este capítulo al caso de los agujeros de gusano dinámicos, al recuperar los resultados obtenidos sobre este fenómeno mediante la utilización de distintas coordenadas. Este estudio parecería acabar así con cualquier posible duda sobre la validez de este método aunque, por supuesto, podría haber otros métodos de estudio que también proporcionarían una descripción consistente de este proceso. Es más, en este trabajo, [179], Di Criscienzo y col. introducen un posible significado físico para el parámetro de energía  $\omega_\phi$ , al notar que éste es expresable en términos del vector Kodama que proporciona un flujo temporal privilegiado,  $\omega_\phi = -k^\alpha \partial_\alpha I$ ; de esta forma, los autores afirman que  $\omega_\phi$  sería la energía invariante asociada con una partícula. Si este fuera el caso, la solución presentada en este capítulo que implica el proceso de radiación,  $k_\phi = -2\omega_\phi/C < 0$ , podría conllevar una energía invariante de las partículas radiadas negativa, al parecer posible identificar  $k_\phi$  con cierta cantidad similar al número de onda, o incluso éste mismo, siendo por lo tanto una cantidad positiva. Este hecho no debería sorprendernos ya que la cantidad invariante que caracterice a la energía de “las partículas fantasmas” debería reflejar la violación de la condición de energía nula.

Finalmente, queremos recalcar que el estudio de la termodinámica de los agujeros de gusano iniciado en este capítulo, no sólo posee el interés teórico que conllevaría una mejor comprensión de la relación entre los fenómenos gravitatorios y termodinámicos, sino que nos serviría para comprender la evolución de estructuras espaciotemporales que pueden existir en nuestro Universo. Como ya hemos mencionado, los agujeros de gusano podrían existir en un entorno fantasma y, aunque en nuestro Universo también hay, obviamente, materia ordinaria presente, la existencia de estos objetos seguiría siendo posible si la cantidad total de energía en sus alrededores fuera tal que su parámetro de la ecuación de estado efectivo fuera menor que menos uno.



## Capítulo 5

# Sobre la equivalencia entre los esquemas de Einstein y de Jordan.

Hasta el momento, en la presente memoria hemos considerado los efectos que podría originar el hecho de que la sustancia dominante de nuestro universo fuera la energía oscura, determinando su futuro e incluso, en el caso fantasma, otorgando a los agujeros de gusano un estatus comparable al de los agujeros negros. Sin embargo, como ya hemos señalado en la introducción, la energía oscura no es la única explicación plausible para la expansión acelerada actual de nuestro Universo, aunque sí, considerando a la constante cosmológica como un caso particular de energía oscura, es la única que podría explicar dicho fenómeno dentro del marco de la teoría de la relatividad general.

En la actualidad existe otra corriente de pensamiento que defiende que la relatividad general es válida solamente en ciertos regímenes. En este caso, la aceleración del universo simplemente podría evidenciar que esta teoría no es capaz de describir el universo en su totalidad. De hecho, la validez de la teoría de la relatividad general a escalas astrofísicas grandes y cosmológicas no ha sido demostrada sino simplemente supuesta [180], implicando su aceptación la consideración de la materia<sup>1</sup> y energía oscuras que, por definición, sólo serían observables mediante sus efectos gravitatorios.

De esta forma, en los últimos años se ha producido un resurgimiento del interés en las teorías de gravedad extendida o modificada, en particular en las teorías de gravedad- $f(R)$ , [110], que pueden ser consideradas como uno de los casos más simples que, aún

---

<sup>1</sup>La comprensión de la materia oscura no es uno de los objetos de estudio de la presente memoria. Para nuestros propósitos basta con decir que, en el marco de la relatividad general, dicha materia sería aproximadamente el 22 % del contenido material de nuestro universo, que afectaría a las curvas de rotación de las galaxias y que se espera que su ecuación de estado efectiva sea similar a la de la materia bariónica.

así, podrían ser capaces, al menos en principio, de ajustarse a los datos provenientes de las observaciones, sin necesidad de introducir componentes oscuros [181]. Es más, estas teorías podrían motivarse por cuestiones que son incluso más fundamentales, como podría ser una posible mayor concordancia con el principio de Mach, o considerarse como teorías efectivas a bajas energías de una teoría completa subyacente, [113].

No obstante, incluso si admitiéramos la necesidad de recurrir a una teoría de gravedad- $f(R)$  como responsable de los fenómenos gravitatorios, y aunque el estudio de este tipo de teorías ha mostrado resultados interesantes en la descripción de nuestro universo actual ([182; 183] entre otros), estos estudios tienen un carácter mayoritariamente fenomenológico y no se basan en ningún principio fundamental como la conservación o invariancia de alguna cantidad o simetría intrínseca de la teoría.

Por otro lado, es bien conocido que las teorías de gravedad- $f(R)$  en el formalismo métrico<sup>2</sup>, esquema de Jordan, se pueden relacionar mediante una transformación conforme con la teoría de la relatividad general en presencia de un campo escalar en el esquema de Einstein, siendo por tanto ambas teorías matemáticamente equivalentes. Este hecho simplificaría el tratamiento de la teoría que queramos considerar, ya que podríamos realizar los cálculos en el esquema en el que estos adopten una forma más simple, siempre que refiramos los resultados obtenidos al esquema físico, entendiendo como tal a aquél escenario en el que consideremos que la física tiene lugar realmente. Esto condujo a que se adoptaran diferentes posturas (que pueden encontrarse en [115]): considerar que es el esquema de Einstein es el esquema físico; aceptar, por el contrario, que es el esquema de Jordan en el que se debe describir la física; o incluso una tercera opción, pensar que la equivalencia matemática entre estos dos esquemas implica una equivalencia física, al menos a nivel clásico, con lo que los dos esquemas tendrían el mismo estatus. Esta tercera opción debe ser considerada con cautela, ya que si ésta no se cumpliera la interpretación de los resultados de una cierta teoría en el esquema equivocado nos podría conducir a desecharla prematuramente.

De hecho, ya ha sido indicado en la literatura (un ejemplo se puede encontrar en la Ref. [184]), que la equivalencia matemática existente entre el esquema de Einstein y el de Jordan no implica una equivalencia física, con lo que el esquema físico debería ser fijado para poder discutir los resultados de una teoría dada. Sin embargo, dicha equivalencia física sigue siendo materia de debate y continua habiendo estudios que afirman que las predicciones físicas clásicas deben ser invariantes bajo una transformación conforme [185].

---

<sup>2</sup>En esta memoria nos referiremos sólo a teorías de gravedad- $f(R)$  en el formalismo métrico, es decir, teorías en las cuales se considera la conexión afín a la métrica que aparece en la acción. Cuando esta condición no se cumple se dice que el formalismo de la teoría de gravedad- $f(R)$  es el de Palatini (véase, por ejemplo, [110]).

En el presente capítulo resumiremos primero algunas de las características principales de las teorías de gravedad- $f(R)$ , así como del método de simetrías Nöther en cosmología, [31], el cual nos podría ayudar a seleccionar algunas teorías de este tipo mediante un procedimiento no fenomenológico y, desde un punto de vista práctico, simplificaría las ecuaciones de movimiento en el caso cosmológico (sección 5.1). En la sección 5.2 mostraremos como la aplicación de este método nos puede ayudar a encontrar un modelo cosmológico- $f(R)$  con solución exacta, capaz de describir una fase en la que la dinámica está dominada por la materia anterior a la fase de aceleración actual y que, al menos en principio, es capaz de describir los datos provenientes de las observaciones [32]. Ya que el estudio de dicho modelo es completamente analítico, éste podrá ser comparado con el que se obtiene mediante una transformación conforme en el esquema de Einstein, sin realizar ninguna aproximación. De esta forma, en la sección 5.3, mostraremos como los observables de los modelos que se obtienen en los diferentes esquemas son distintos, no existiendo, por lo tanto, equivalencia física entre ellos [33]. Finalmente subrayaremos las conclusiones que obtenemos en este estudio (sección 5.4). A lo largo del mismo, utilizaremos métricas con signatura  $(-, +, +, +)$ , al igual que en el capítulo anterior, la definición del tensor de Riemann tal que en un modelo FLRW produzca  $R > 0$  y, por simplicidad, emplearemos unidades tal que  $8\pi G = 1$ .

## 5.1. Gravedad- $f(R)$ y simetrías Nöther.

Las teorías de gravedad- $f(R)$  consideran una acción de la forma

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \mathcal{A}_m, \quad (5.1.1)$$

donde  $f(R)$  es una cierta función del escalar de Ricci,  $R$ , cuya especificación implica la consideración de una teoría particular y  $\mathcal{A}_m$  es la acción de los campos materiales que están mínimamente acoplados con la gravedad. Se debe destacar que la relatividad general es un caso particular de estas teorías, ya que si consideramos  $f(R) = R/2$  en (5.1.1) recuperamos la acción de Hilbert-Einstein.

En el formalismo métrico las ecuaciones de campo de esta acción son, en general, ecuaciones diferenciales de 4º orden de la forma

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R + g_{\mu\nu} \square f_R = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^m, \quad (5.1.2)$$

con el subíndice  $R$  indicando las derivadas con respecto al escalar de Ricci,  $\square \equiv \nabla^\alpha \nabla_\alpha$  y  $T_{\mu\nu}^m = -2/\sqrt{-g} \cdot \delta \mathcal{L}_m / (\delta g^{\mu\nu})$  es el tensor energía-momento de la materia. Esta ecuación

puede re-escribirse de forma más familiar, como<sup>3</sup> [181]

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{curv}} + \frac{1}{2f_R} T_{\mu\nu}^{\text{m}}, \quad (5.1.3)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R$  es el tensor de Einstein ordinario y

$$T_{\mu\nu}^{\text{curv}} = \frac{1}{f_R} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - Rf_R) + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R \right]. \quad (5.1.4)$$

La expresión (5.1.3) evidencia como se puede definir un parámetro gravitatorio efectivo,

$$G_{\text{eff}} = \frac{1}{2f_R}, \quad (5.1.5)$$

que se reduce al valor constante unidad de Einstein (en nuestras unidades con  $8\pi G = 1$  y  $c = 1$ ) en el caso particular  $f(R) = R/2$ .

Como acabamos de ver las ecuaciones de campo (5.1.2) de estas teorías son en general ecuaciones diferenciales de 4º orden, con lo que no es tarea fácil encontrar soluciones analíticas de las mismas. Si existiera una cierta simetría Nöther, ésta implicaría la presencia de una constante del movimiento, con lo que el problema se simplificaría en gran medida [31]. Este hecho se puede ver fácilmente considerando un Lagrangiano tipo punto  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  no degenerado, cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0. \quad (5.1.6)$$

Si consideramos un campo vectorial

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{d}{dt} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (5.1.7)$$

y contraemos la (5.1.6) con las  $\alpha^i(\mathbf{q})$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}, \quad (5.1.8)$$

donde  $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}$  es la derivada de Lie de  $\mathcal{L}$ . Por lo tanto, si  $\mathbf{X}$  es una simetría de la dinámica de  $\mathcal{L}$ ,  $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0$ , la función

$$\Sigma = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}, \quad (5.1.9)$$

---

<sup>3</sup>Se podría realizar otra definición de  $T_{\mu\nu}^{\text{curv}}$  que implicara que dicha cantidad se conservase [110], dando lugar, por tanto, a otra expresión de las ecuaciones de movimiento, también similar a las ecuaciones de Einstein.

es una constante del movimiento. Así, existirá un cambio de coordenadas, que no será único en general, tal que una de las nuevas coordenadas sea cíclica,  $\mathbf{X}' = \partial/\partial Q^1$ , implicando  $\partial\mathcal{L}'/\partial Q^1 = 0$ , lo que simplifica el tratamiento del problema.

El método de las simetrías Nöther en cosmología [31] se basa en la suposición de una cierta simetría arbitraria que nos ayude a simplificar las ecuaciones de movimiento. En particular, en modelos cosmológicos- $f(R)$  dicho método es aplicable considerando el espacio de configuración  $\mathcal{Q} = \{a, R\}$ , estando, por lo tanto, el Lagrangiano de tipo punto definido en el fibrado tangente,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, \dot{a}, R, \dot{R})$ , [31], como veremos en la próxima sección.

## 5.2. Modelo cosmológico- $f(R)$ con solución analítica.

Consideramos un modelo cosmológico- $f(R)$  que sólo contiene materia ordinaria, por lo que la acción vendrá dada por (5.1.1) con  $\mathcal{A}_m$  la acción de un fluido perfecto mínimamente acoplado con la gravedad de tipo polvo. El espaciotiempo está descrito por la métrica de FLRW con curvatura espacial,  $k$ , arbitraria, con lo que podemos considerar el espacio de configuración dado por las variables  $a(t)$  y  $R(t)$ , siempre que la expresión de  $R$  en términos de  $a$  se recupere como una limitación de la dinámica. Así, mediante la utilización de un multiplicador de Lagrange, la densidad lagrangiana resulta:

$$\mathcal{L} = a^3 \left\{ f(R) - \lambda \left[ R - 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \right\} - D, \quad (5.2.1)$$

donde  $D$  representa la cantidad de fluido de tipo polvo actual,  $D = \rho_0 a_0^3$  [186]. La variación de la acción asociada a (5.2.1) con respecto a  $R$  nos proporciona el valor del multiplicador de Lagrange,  $\lambda = f_R$ . Introduciendo este valor en la acción e integrando por partes, obtenemos el Lagrangiano de tipo punto FLRW [31]

$$\mathcal{L} = a^3 (f - R f_R) - 6a^2 f_{RR} \dot{R} \dot{a} - 6f_R a \dot{a}^2 + 6k f_R a - D, \quad (5.2.2)$$

que, mediante el cálculo del determinante del hessiano, será no degenerado siempre que  $f_{RR} \neq 0$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L}$  es degenerado para los grados de libertad  $\{a, \dot{a}, R, \dot{R}\}$  cuando la acción es la de Hilbert-Einstein.

Por otro lado, la energía total

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}} \dot{R} - \mathcal{L}, \quad (5.2.3)$$

se conserva y, se puede comprobar, que la condición  $E_{\mathcal{L}} = 0$  corresponde a la ecuación de campo  $\{0, 0\}$ , (5.1.2). Esto es:

$$E_{\mathcal{L}} = -6f_{RR}a^2\dot{a}\dot{R} - 6f_Ra\dot{a}^2 - 6f_Ra k - a^3(f - Rf_R) + D. \quad (5.2.4)$$

Las ecuaciones de movimiento de  $a$  y  $R$  son:

$$6f_{RRR}\dot{R}^2 + 6f_{RR}\ddot{R} + 6f_RH^2 + 12f_R\frac{\ddot{a}}{a} = -3(f - Rf_R) - 12f_{RR}H\dot{R} - 6f_R\frac{k}{a^2}, \quad (5.2.5)$$

y

$$f_{RR} \left[ R - 6 \left( H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} \right) \right] = 0, \quad (5.2.6)$$

respectivamente. Por lo tanto, considerando  $a$  y  $R$  variables independientes, hemos recuperado, consistentemente, la definición del escalar de Ricci de un modelo FLRW mediante la Eq. (5.2.6).

Con el objetivo de encontrar un modelo cosmológico- $f(R)$  con una solución analítica capaz de reproducir una fase de expansión acelerada y una fase decelerada previa suficiente como para permitir la formación de estructuras, podemos buscar una solución del sistema formado por las ecuaciones (5.2.4), (5.2.6) y (5.2.5) mediante el método de las simetrías Nöther en cosmología [31]. Por lo tanto, buscamos un campo vectorial

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial R} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{R}}, \quad (5.2.7)$$

con  $\alpha = \alpha(a, R)$ ,  $\beta = \beta(a, R)$ ,  $\dot{\alpha} = (\partial\alpha/\partial a)\dot{a} + (\partial\alpha/\partial R)\dot{R}$  y  $\dot{\beta} = (\partial\beta/\partial a)\dot{a} + (\partial\beta/\partial R)\dot{R}$ , tal que

$$L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0. \quad (5.2.8)$$

Teniendo en cuenta las Eqs. (5.2.2) y (5.2.7), en la condición (5.2.8), obtenemos el sistema formado por las ecuaciones siguientes

$$f_R \left( \alpha + 2a \frac{\partial\alpha}{\partial a} \right) + f_{RR}a \left( \beta + a \frac{\partial\beta}{\partial a} \right) = 0, \quad (5.2.9)$$

$$a^2 \frac{\partial\alpha}{\partial R} f_{RR} = 0, \quad (5.2.10)$$

$$2f_R \frac{\partial\alpha}{\partial R} + f_{RR} \left( 2\alpha + a \frac{\partial\alpha}{\partial a} + a \frac{\partial\beta}{\partial R} \right) + a\beta f_{RRR} = 0, \quad (5.2.11)$$

$$\alpha f_R + a\beta f_{RR} = 0, \quad (5.2.12)$$

$$3\alpha(f - Rf_R) - a\beta Rf_{RR} = 0, \quad (5.2.13)$$

donde la Eq. (5.2.12) no aparece si imponemos una geometría espacial plana y la Eq. (5.2.10) implica que  $\alpha$  es sólo función de  $a$ , para evitar casos en los que el lagrangiano de tipo punto sea degenerado.



El sistema formado por las Eqs. (5.2.9-5.2.13) podría no tener solución para ciertas funciones  $f(R)$ , no existiendo en estos casos ninguna simetría en la dinámica. Una posible solución de este sistema es

$$f(R) = R^{3/2}, \quad \alpha = 1/a, \quad \beta = -2R/a^2. \quad (5.2.14)$$

Por lo tanto, el modelo cosmológico con  $f(R) = R^{3/2}$  tendrá una constante de movimiento y existirá un cambio de coordenadas, en general no único,  $\{a, R\} \rightarrow \{u, v\}$ , tal que el campo vectorial se exprese como

$$\mathbf{X}_{\text{nuevo}} = \frac{\partial}{\partial v}, \quad (5.2.15)$$

al ser la nueva coordenada  $v$  cíclica. Para encontrar estas nuevas coordenadas podemos notar que (5.2.15) implica que  $\langle dv, X \rangle = 1$  y  $\langle du, X \rangle = 0$ , con  $\langle b, Y \rangle = y^i b_i$ . De esta forma, una posible elección sería

$$u = a^2 R, \quad v = a^2/2, \quad (5.2.16)$$

en término de la cual el Lagrangiano de tipo punto (5.2.2) se puede expresar como

$$\mathcal{L}_{\text{nuevo}}(u, \dot{u}, \dot{v}) = -\frac{u^{3/2}}{2} - \frac{9}{2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{\sqrt{u}} + 9k\sqrt{u} - D. \quad (5.2.17)$$

La constante de movimiento asociada a la simetría (5.2.15) es proporcional a  $\Sigma_1 = \dot{u}/\sqrt{u}$ , pudiendo ser integrada para obtener

$$u = \frac{1}{4} (\Sigma_1 t + \Sigma_0)^2, \quad (5.2.18)$$

con  $\Sigma_0$  una constante de integración. Introduciendo la expresión de  $u$  en la condición  $E_{\mathcal{L}} = 0$  e integrando, obtenemos

$$v = \frac{\Sigma_1^2}{288} t^4 + \frac{\Sigma_1 \Sigma_0}{72} t^3 + \left( \frac{\Sigma_0^2}{48} - \frac{k}{2} \right) t^2 + \left( \frac{\Sigma_0^3}{72 \Sigma_1} - k \frac{\Sigma_0}{\Sigma_1} + \frac{2D}{9 \Sigma_1} \right) t + v_0, \quad (5.2.19)$$

donde  $v_0$  es también una constante de integración.

Ahora podemos deshacer el cambio (5.2.16) para obtener el factor cósmico de escala [32]

$$a = \sqrt{a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t}, \quad (5.2.20)$$

con

$$a_4 = \frac{\Sigma_1^2}{144} \quad ; \quad a_3 = \frac{\Sigma_1 \Sigma_0}{36} \quad ; \quad a_2 = \frac{\Sigma_0^2}{24} - k \quad ; \quad a_1 = \frac{\Sigma_0^3}{36 \Sigma_1} - 2k \frac{\Sigma_0}{\Sigma_1} + \frac{4D}{9 \Sigma_1},$$

y, por simplicidad, hemos fijado  $a(0) = 0$ , es decir  $v_0 = 0$ .

Esta solución se comporta como  $a \propto t^2$  para  $t$  grande y como  $a \propto t^{1/2}$  para  $t$  pequeño. Por lo tanto, podría haber una transición suave entre estos regímenes que pasase por un periodo durante el que la solución se aproximase razonablemente bien a  $a \propto t^{2/3}$ , teniendo así un comportamiento similar a un modelo de Friedmann dominado por materia en esta época transitoria. Para ver si esta expectativa se cumple, consideramos que el tiempo cósmico está definido en unas unidades tal que su valor actual sea  $t_0 = 1$ . Esta elección no afectará a los resultados exceptuando al valor de  $H_0$ , ya que la cantidad adimensional  $H_0 t_0 \approx 0,93$  debe mantener el mismo valor; por simplicidad fijamos  $H_0 = 1$ . Por otro lado, tomamos un valor unidad del factor cósmico de escala actual,  $a_0 = 1$ , teniendo en cuenta que esta consideración no nos permitirá imponer ninguna normalización a  $k$ . Finalmente, fijamos un valor para el parámetro de deceleración actual  $q_0 = -0,4$ , que puede describir una expansión acelerada razonable [187; 188]. Estas consideraciones nos proporcionan un modelo que depende sólo de un parámetro, el cual se puede fijar si consideramos que nuestro modelo sólo contiene materia bariónica,  $\Omega_{m,0} = G_{\text{eff},0} D / (3a_0^3 H_0^2) \approx 0,04$ , con  $G_{\text{eff}}$  definida en la Eq. (5.1.5); en particular,  $\Omega_{m,0} \simeq 0,042$  implica  $a_4 = 0,106$ . Así, obtenemos [32]

$$a = \sqrt{\frac{t}{5} [2 + 0,53(t-1)^3 + t + 2t^2]}. \quad (5.2.21)$$

Ahora podemos comparar nuestra solución con un modelo de Friedmann tipo polvo,  $a_f = a_{f0} t^{2/3}$ , teniendo en cuenta que  $a_{f0}$  debe ser menor que  $a_0$ , Fig. (5.1), obteniendo un buen acuerdo entre ambos. De hecho la diferencia entre dichos modelos se aproxima al 3 % en el intervalo  $2 \leq z \leq 4$ , lo que sería suficiente para una fase dominada por galaxias, Fig. (5.2).

Volviendo a los parámetros originales, se puede ver que  $k \simeq -0,49$ , lo que implica<sup>4</sup>  $\Omega_{k,0} = k / (H_0^2 a_0^2) \simeq -0,49$ . Por lo tanto, este modelo describe un universo espacialmente abierto en lugar de uno espacialmente plano, como hemos considerado hasta ahora en todos los modelos presentados en esta memoria. Sin embargo, se debe destacar que la condición  $\Omega_k \simeq 0$  se obtiene precisamente al intentar interpretar los datos provenientes de las observaciones del fondo cósmico de microondas, ajustándolos a modelos basados en la relatividad general, por lo que esta restricción podría depender fuertemente de los modelos de prueba. Es más, ya que  $\Omega_{m,0} - \Omega_{k,0} + \Omega_{R,0} = 1$ , los efectos de la curvatura serían ligeramente menores que los producidos por no tener un modelo espacialmente plano, siendo  $\Omega_{R,0} \simeq 0,46$ .

Por otra parte, con la elección de parámetros utilizada, obtenemos  $D = 0,88$  que,

---

<sup>4</sup>Este valor, y por lo tanto el de  $\Omega_{R,0}$  que expondremos a continuación, difieren de los valores expuestos en la Ref. [32], no viéndose afectados los comentarios incluidos con respecto al primero, aunque sí, en cierta medida, las conclusiones extraídas del segundo.

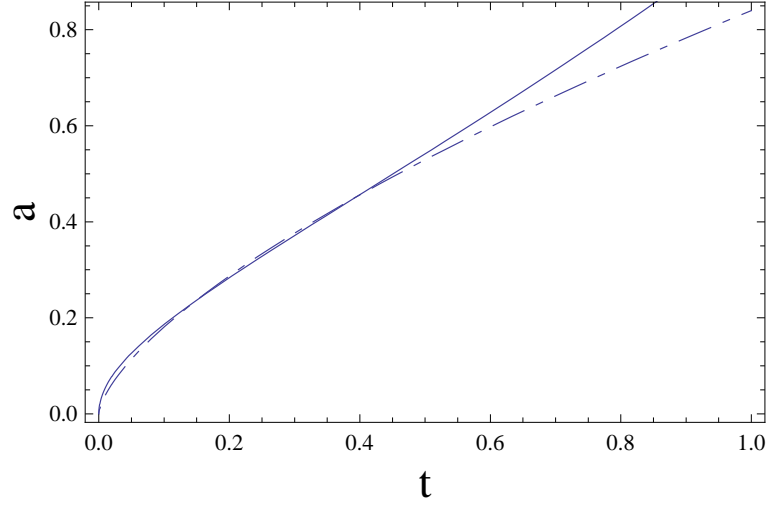


Figura 5.1: Representación del factor cósmico de escala en función del tiempo de un modelo de Friedmann tipo polvo (línea discontinua) y de nuestro modelo (línea continua).

como ya hemos indicado, corresponde a una  $\Omega_{m,0}$  muy cercana al contenido bariónico que esperamos se encuentre en nuestro Universo. Ahora, podríamos considerar un observador que viviera en un universo descrito por nuestro modelo y que supusiera que la dinámica del universo está gobernada por una acción de Hilbert-Einstein, que contiene  $f(R) = R/2$ , ignorando que en realidad la función involucrada es  $f(R) = R^{3/2}$ . De esta forma, dicho observador realizaría su tratamiento ignorando  $G_{\text{eff}}$  (o, lo que es lo mismo, tomando un valor unidad para esta función como resultado de la consideración de la teoría de Einstein) y obtendría  $\Omega'_{m0} \simeq 0,29$ . Este valor es cercano al que se espera para todo el contenido material del universo, incluyendo la materia oscura; por lo tanto, en este escenario, parece que la consideración de la materia oscura podría ser simplemente un hecho debido a la ignorancia de la teoría física subyacente.

Para poner a prueba nuestro modelo, podemos considerar el modulo de la distancia medido en SNIa. Con este propósito, comparamos nuestra solución con un modelo  $\Lambda$ CDM estándar (un modelo que contiene una constante cosmológica positiva y materia oscura fría), ya que éste es capaz de reproducir satisfactoriamente las observaciones mencionadas. Así, tomando como referencia un  $\Lambda$ CDM con  $\Omega_m = 0,27$ , obtenemos la Figura 5.3. Debemos mencionar que esta figura es ligeramente distinta a la incluida en la Ref. [32], debido a un error de cálculo menor en dicha referencia. A pesar de ello, podemos ver como la coincidencia entre nuestro modelo y el  $\Lambda$ CDM considerado sigue siendo razonablemente buena.

A pesar de los buenos resultados obtenidos, debemos incluir ahora algunos comenta-

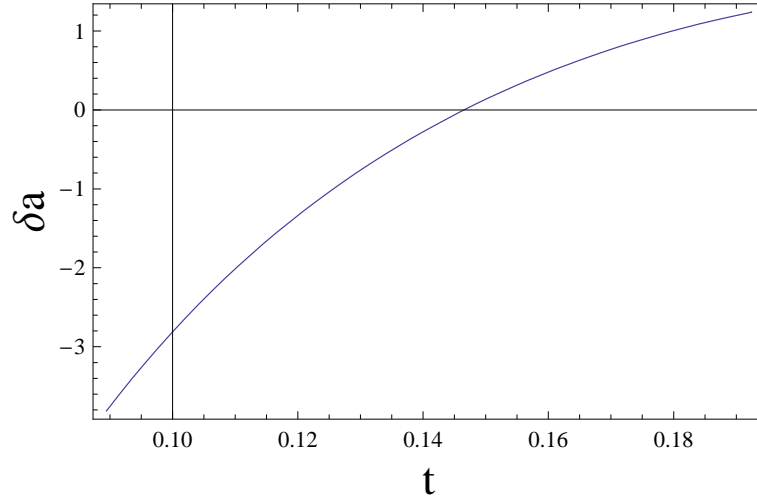


Figura 5.2: Diferencia porcentual,  $\delta a$ , del factor de escala de un modelo de Friedmann tipo polvo y nuestro modelo en un rango de tiempo correspondiente a  $2 \leq z \leq 4$ . En dicho intervalo la diferencia es menor que el 3 %.

rios. Como hemos visto, en nuestro modelo, la historia dinámica del universo está descrita por un factor de escala  $a \sim t^{1/2}$  en épocas tempranas y  $a \sim t^2$  en épocas tardías, produciendo un comportamiento similar al de tipo polvo que aparecería en un modelo de Friedmann usual en la época intermedia. Por lo tanto, este modelo podría tratar, en principio, dos de los propósitos principales de los modelos de energía oscura: (1) producir una época similar a la de Friedmann tipo polvo adecuada para la formación de estructuras a gran escala, y (2) una expansión acelerada actual. Es más, podemos definir un parámetro de la ecuación de estado efectiva  $w_{\text{eff}} = p_{\text{tot}}/\rho_{\text{tot}}$ , donde dentro de la presión total y la densidad de energía total se consideren todas las componentes, es decir, los términos provenientes de  $k$  y de la curvatura, del tipo (5.1.4); conteniendo en el caso del modelo  $\Lambda$ CDM las contribuciones de la constante cosmológica y la materia oscura fría. Este parámetro efectivo se podrá expresar en general como

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5.2.22)$$

En la Figura 5.4 comparamos el parámetro que se obtiene en nuestro modelo con el del  $\Lambda$ CDM de referencia ya mencionado. Podemos ver que, aunque ambas gráficas son obviamente diferentes, la distancia entre ellas no es muy grande en el intervalo  $0 \leq z \leq 4$ . Se debe mencionar que no tiene sentido comparar ambos modelos para  $z > 4$ , ya que esperamos que los efectos de la radiación comiencen a ser relevantes en este rango.

Por último, queremos señalar que, aunque nuestro modelo es capaz de reproducir una fase similar a la dominada por materia que se obtiene en relatividad general, la

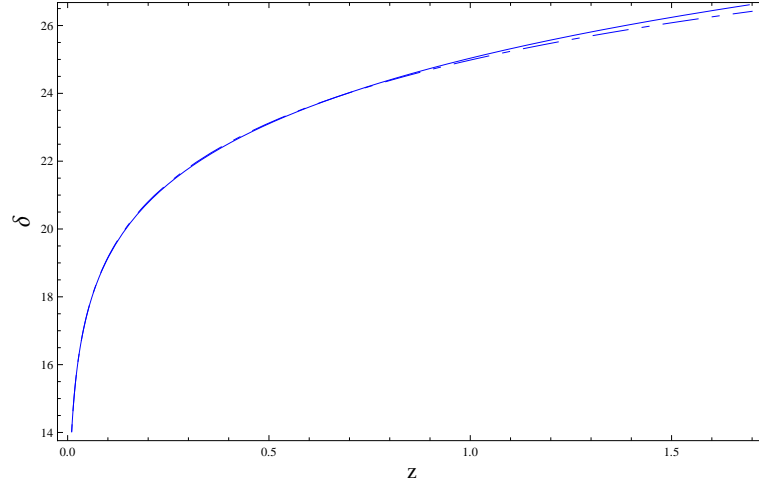


Figura 5.3: Comparación del modulo de la distancia,  $\delta$ , frente al corrimiento al rojo,  $z$ , de nuestro modelo (línea continua) y el  $\Lambda$ CDM de referencia (línea discontinua). El acuerdo entre ambos es muy bueno.

existencia de dicha fase es necesaria pero no suficiente para demostrar la compatibilidad de nuestro modelo con la formación de estructuras. Un estudio detallado en este sentido sería necesario para asegurar la viabilidad de dicho modelo.

### 5.3. No equivalencia física del esquema de Einstein y el de Jordan.

Aparte del valor intrínseco del modelo que acabamos de exponer, éste tiene una ventaja añadida al permitirnos obtener una solución analítica. De esta forma, podemos realizar una transformación conforme del esquema de Jordan, en el que se define nuestro modelo, al de Einstein para comparar las cantidades observables que se obtienen en ambos casos sin necesidad de realizar ninguna aproximación [33], que podría llevarnos a equívocos sobre la posible equivalencia física de ambos esquemas.

Con este propósito consideramos en primer lugar la parte gravitatoria de nuestra acción. Esta es

$$\mathcal{A}_G = \int d^4x \sqrt{-g} R^{3/2}, \quad (5.3.1)$$

que, mediante la definición del campo escalar auxiliar

$$\varphi(R) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(3R^{1/2}), \quad (5.3.2)$$

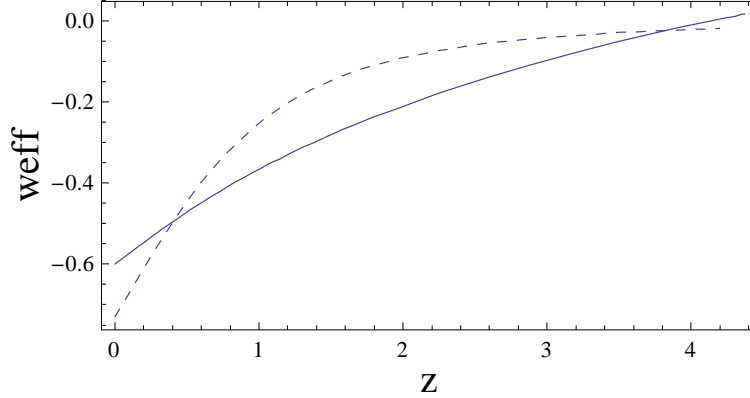


Figura 5.4: Comparación del parámetro de la ecuación de estado efectivo,  $w_{\text{eff}}$ , en nuestro modelo (línea continua) y  $\Lambda\text{CDM}$  (línea discontinua).

puede re-expresarse como

$$\mathcal{A}_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} e^{\sqrt{2/3}\varphi} - \frac{1}{54} e^{3\sqrt{2/3}\varphi} \right]. \quad (5.3.3)$$

Se debe destacar que el campo auxiliar  $\varphi$  no introduce ninguna característica física nueva. De hecho, se puede ver que este es el caso ya que la ecuación del campo  $\varphi$  que se deriva de la Eq. (5.3.3) recupera la definición del campo dada por la Eq. (5.3.2). Si ahora realizamos una transformación conforme con parámetro conforme

$$b(t) = \exp \left( \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \right), \quad (5.3.4)$$

el cual es una función del tiempo  $t$  ya que  $\varphi[R(t)] = \varphi(t)$ , la acción resultante será la de Hilbert-Einstein con un campo escalar  $\varphi(t)$ . Es decir,

$$\mathcal{A}_G = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (5.3.5)$$

donde la nueva métrica es  $\bar{g}_{\mu\nu} = b(t)^2 g_{\mu\nu}$ ,  $\bar{R}$  es el escalar de Ricci asociado a ésta y  $V(\varphi) = \exp[\sqrt{2/3}\varphi]/54$ . Como hemos partido de un modelo FLRW, podemos notar que la nueva métrica no estará definida en función de su tiempo cósmico,  $\bar{g}_{00} = b(t)^2$ , por lo que realizamos una transformación de la coordenada temporal tal que  $\tau = b(t)dt$ , dejando las coordenadas espaciales fijas. De esta forma, se obtiene

$$\mathcal{A}_G = \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{2} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi} \tilde{\partial}_\nu \tilde{\varphi} - \tilde{V}(\tilde{\varphi}) \right], \quad (5.3.6)$$

con  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  una métrica de FLRW con  $\tilde{g}_{00} = -1$  y factor cósmico de escala

$$a_E(\tau) = b(\tau)a(\tau), \quad (5.3.7)$$

siendo  $\tilde{R}$  el escalar de Ricci de esta métrica,  $\tilde{R}(\tau) = \bar{R}(t(\tau))$ ,  $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(t(\tau))$  y  $\tilde{V}(\tilde{\varphi}) = V(\varphi)$ . Si ahora consideramos también la transformación conforme de la parte de la acción que describe al contenido material, obtendremos la acción total en el esquema de Einstein, en el que el Lagrangiano tipo punto se expresa como [33]

$$\mathcal{L} = -3 a_E (\partial_\tau a_E)^2 + 3 k a_E + \frac{a_E^3}{2} (\partial_\tau \tilde{\varphi})^2 - a_E^3 \tilde{V}(\tilde{\varphi}) - e^{-\tilde{\varphi}/\sqrt{6}} D, \quad (5.3.8)$$

donde la constante  $D$  es la misma constante que aparecía en el esquema de Jordan, que ahora está relacionada con la densidad de energía en el esquema de Einstein mediante  $\tilde{\rho}_m = D/a_E^3$ . Este Lagrangiano de punto evidencia como la transformación conforme ha generado un acoplo entre el término de materia y el campo escalar, como ya fue señalado en la Ref. [189], que producirá la no conservación de estos fluidos de forma independiente.

Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu}^{\tilde{\varphi}} + \tilde{T}_{\mu\nu}^m + \tilde{T}_{\mu\nu}^{int}, \quad (5.3.9)$$

donde

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{\tilde{\varphi}} = \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi} \tilde{\partial}_\nu \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi} \tilde{\partial}^\alpha \tilde{\varphi} + \tilde{V}(\tilde{\varphi}) \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (5.3.10)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^m = \text{diag}(\tilde{\rho}_m, 0, 0, 0), \quad (5.3.11)$$

y

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{int} = \left( e^{-\tilde{\varphi}/\sqrt{6}} - 1 \right) \text{diag}(\tilde{\rho}_m, 0, 0, 0). \quad (5.3.12)$$

Debe notarse que, con las definiciones (5.3.10), (5.3.11) y (5.3.12), hemos expresado las diferentes componentes de forma que  $\tilde{T}_{\mu\nu}^m$  se conserve, aunque  $\tilde{T}_{\mu\nu}^{\tilde{\varphi}}$  y  $\tilde{T}_{\mu\nu}^{int}$  no satisfagan ninguna ley de conservación de forma independiente, sino  $\left( \tilde{T}_{\mu\nu}^{\tilde{\varphi}} + \tilde{T}_{\mu\nu}^{int} \right)^{;\mu} = 0$ . Por supuesto, el hecho de que haya aparecido un acoplo entre la materia y el campo escalar nos puede hacer sospechar, desde ahora, que los dos esquemas podrían no ser físicamente equivalentes. No obstante, una afirmación de este tipo se debe basar en la comparación de cantidades observables y no mediante leyes de conservación cuya validez, aunque puede ser supuesta de forma consistente, no se mide de forma directa.

### 5.3.1. Esquema de Jordan versus esquema de Einstein.

Acabamos de mostrar que, como es bien conocido, el esquema de Jordan y el de Einstein son matemáticamente equivalentes, con lo que las soluciones de dos modelos definidos en distintos esquemas y relacionados mediante una transformación conforme estarán también relacionadas mediante la misma transformación [181]. Sin embargo,

esta equivalencia matemática no tiene porque implicar necesariamente una equivalencia física y ésta no se debería presuponer, ya que nos podría llevar a descartar modelos válidos debido al estudio de su dinámica en el esquema que no fuera físico.

Para demostrar que ambos esquemas no son físicamente equivalentes en general, nos basta con encontrar un ejemplo de un modelo cuyo transformado conforme implique distintas cantidades físicas medibles. Por esta razón pasamos a comparar el modelo presentado en la sección 5.1 con su transformado conforme [33]. Así, consideramos el escalar de Ricci en el esquema de Jordan, que puede deducirse a partir de la Eq. (5.2.21). Este es

$$R(t) = \frac{9(41 + 212t)^2}{212t(147 + 259t + 41t^2 + 53t^3)}. \quad (5.3.13)$$

Por lo que, a través de la Eq. (5.3.4), el factor conforme se puede expresar en términos de  $t$  como

$$b(t) = \frac{3\sqrt{41 + 212t}}{\sqrt{106}(147t + 259t^2 + 41t^3 + 53t^4)^{1/4}}, \quad (5.3.14)$$

con  $t$  el tiempo cósmico en el esquema de Jordan que se relaciona con el tiempo cósmico de Einstein mediante

$$\tau = \int dt b(t). \quad (5.3.15)$$

Ya que  $a_E(t) = b(t)a(t)$ , la Eq. (5.3.14) nos permite obtener el factor de escala en el esquema de Einstein en términos de  $t$  y, por lo tanto, en términos de  $\tau$  a través de la Eq. (5.3.15). De esta forma, considerando las Eqs. (5.3.4) y (5.3.15), podríamos conocer, en principio, la forma explícita de  $\tilde{\varphi}(\tau)$ . Desafortunadamente, no es posible obtener una solución analítica para  $\tau(t)$ . Sin embargo, podemos realizar un estudio analítico completo en términos de  $t$ , teniendo en cuenta que, en el esquema de Einstein, éste es sólo un parámetro arbitrario y no el tiempo cósmico. Este procedimiento no afectará a los resultados finales, ya que estos se representarán en términos del corrimiento al rojo,  $z$ , que es una cantidad observable. La notación que vamos a utilizar consiste en mantener el punto para denotar las derivadas con respecto a  $t$  y escribir explícitamente las derivadas con respecto al tiempo cósmico  $\tau$ .

De esta forma, podemos escribir el parámetro de Hubble y el factor de deceleración en el esquema de Einstein como

$$H_E(t) = \frac{\partial_\tau a_E}{a_E} = \frac{1}{b(t)} \frac{\dot{a}_E}{a_E}, \quad (5.3.16)$$

y

$$q_E(t) = -\frac{(\partial_\tau^2 a_E) a_E}{(\partial_\tau a_E)^2} = -\frac{\ddot{a}_E a_E}{\dot{a}_E^2} + \frac{\dot{b} a_E}{b \dot{a}_E}, \quad (5.3.17)$$



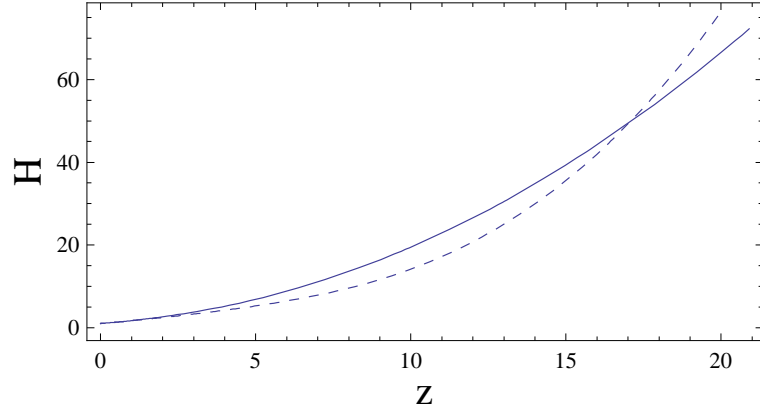


Figura 5.5: Comparación del parámetro de Hubble,  $H(z)$ , en el modelo resultante en el esquema de Jordan (línea continua) y en el esquema de Einstein (línea discontinua), ambos normalizados por su valor actual.

respectivamente. El corrimiento al rojo también se puede expresar en términos del parámetro  $t$  del siguiente modo

$$z_E(t) = -1 + \frac{a_{E,0}}{a_E(t)}, \quad (5.3.18)$$

donde  $a_{E,0}$  es el factor cósmico de escala actual. Ahora, podemos eliminar el parámetro  $t$  de nuestro estudio si consideramos parejas de ecuaciones paramétricas, estudiando así  $H_E(z)$  y  $q_E(z)$ .

Para realizar este estudio debemos fijar  $t_0 = t(\tau_0)$  en el esquema de Einstein y lo hacemos requiriendo que el parámetro de deceleración actual, que es adimensional, tome el mismo valor que hemos considerado en el esquema de Jordan, esto es  $q_{E,0} = -0,4$ , obteniendo el valor  $t_0 \simeq 1,24$ . Así podemos representar el parámetro de Hubble  $H_E(z)$  y el parámetro de deceleración  $q_E(z)$  y compararlos con las cantidades correspondientes en el esquema de Jordan, Figs. (5.5) y (5.6), respectivamente. A la vista de estas figuras, que ponen en evidencia que ambas funciones son diferentes, podemos deducir que los dos esquemas no son equivalentes; de hecho, hubiera sido suficiente que una de estas funciones fuera distinta para realizar tal afirmación.

Por otra parte, también podemos comparar cantidades adimensionales como  $\Omega_{m,0}$  en ambos esquemas. En el esquema de Jordan, como hemos mostrado en la sección anterior,  $\Omega_{m,0} = \rho_{m,0}/(6f_R H_0^2) \simeq 0,04$ , que es compatible con el contenido total de materia bariónica de nuestro Universo. Mientras que en el esquema de Einstein, se tiene  $\tilde{\Omega}_{m,0} = \tilde{\rho}_{m,0}/(3H_{E,0}^2) \simeq 0,09$ , que es más del doble que su homólogo de Jordan. Por otra parte, en el esquema einsteniano existe un término de interacción que produce  $\tilde{\Omega}_{int,0} = (1/b - 1)\tilde{\rho}_{m,0}/(3H_{E,0}^2) = -0,0567$ , siendo su valor absoluto, por tanto, mayor que la mitad del valor de  $\tilde{\Omega}_{m,0}$ , por lo que debería producir algún efecto observable.

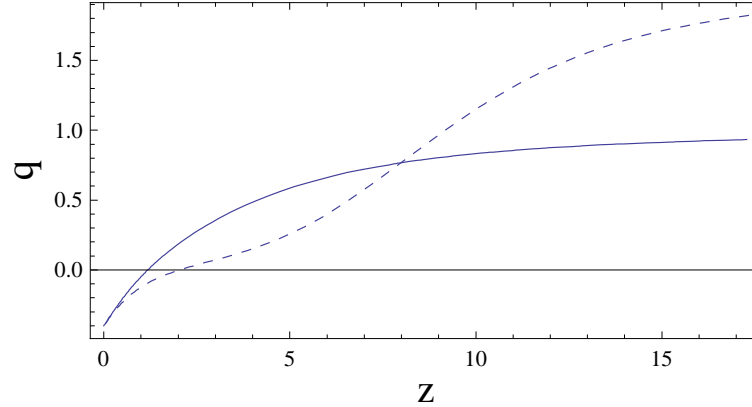


Figura 5.6: Comparación del parámetro de deceleración,  $q(z)$  en el esquema de Jordan (línea continua) y en el esquema de Einstein (línea discontinua).

Finalmente, para clarificar aún más la no equivalencia física entre el esquema de Jordan y el de Einstein, consideraremos un investigador y una investigadora que estudian el modelo mostrado en la sección 5.2 siguiendo dos caminos diferentes. La investigadora refiere todos sus resultados al esquema de Jordan inicial y concluye, por lo tanto, que su modelo puede describir los datos del modulo de la distancia de un modo suficientemente satisfactorio. Por otro lado, el investigador considera que los esquemas de Jordan y Einstein son físicamente equivalentes y calcula el modulo de la distancia en el esquema einsteniano, asumiendo su equivalencia con el correspondiente en el esquema de Jordan. Ya que esta función en el esquema de Jordan se ajusta razonablemente a los datos provenientes de las SNIa y, como mostramos en la Figura 5.7, al ser ambas funciones distintas, el investigador podría concluir prematuramente que este modelo no es capaz de describir nuestro Universo (en ningún esquema, ya que él los considera equivalentes), mientras que la investigadora continuaría con su estudio al no haber encontrado ninguna incompatibilidad.

## 5.4. Conclusiones

En el presente capítulo hemos presentado un modelo cosmológico- $f(R)$  con solución exacta que, mediante una elección adecuada de los parámetros, es capaz de reproducir el comportamiento requerido de una solución tipo Friedmann con materia que evoluciona hasta entrar en una fase de expansión acelerada [32]. Este modelo ha sido obtenido mediante la utilización del método de simetrías Nöther en cosmología [31], el cual se basa en la consideración de la posible existencia de una simetría general de la dinámica considerada.

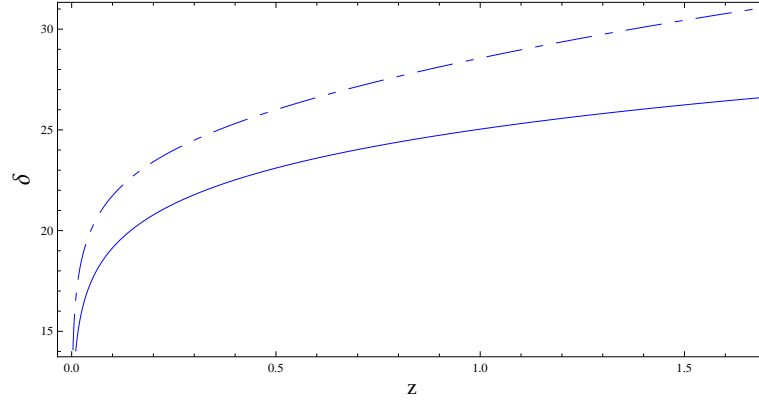


Figura 5.7: Comparación del módulo de la distancia en el esquema de Jordan (línea continua) y en el esquema de Einstein (línea discontinua). El desacuerdo entre ambas funciones es evidente.

Por supuesto, dados los resultados satisfactorios del modelo considerado, sería necesario un estudio más detallado de éste, probablemente fijando más cuidadosamente los parámetros involucrados, lo que conllevaría la introducción de radiación y el estudio de la posible formación de galaxias, entre otras acciones. Sin embargo, se debe destacar que, posteriormente a la publicación del artículo en el que se presentó el modelo de la sección 5.2, [32], se ha realizado un primer estudio que indica la posible obtención de resultados satisfactorios a escalas astrofísicas sin la introducción de materia oscura mediante la misma  $f(R)$  [190].

También debemos señalar que existen ciertas condiciones que suelen ser impuestas a la función  $f(R)$  para que ésta pueda producir modelos viables [191]. En particular, dichas condiciones nos aseguran que nuestro modelo no desarrollará un grado de libertad taquiónico,  $f_{RR} > 0$ , y que el parámetro gravitatorio efectivo no cambiará de signo,  $f_R > 0$ . No obstante, existe otra condición relacionada con la posibilidad de recuperar la cosmología estándar relativista a épocas tempranas que en nuestro caso no se cumple. Este hecho, más que significar un problema de nuestro modelo, podría abrir la puerta a una explicación alternativa de la evolución temprana del universo, siempre que un estudio detallado del modelo permitiera reproducir los datos obtenidos en observaciones tales como las del fondo cósmico de microondas.

Sin embargo, consideramos que el resultado más relevante presentado en este capítulo se refiere a la no equivalencia física del esquema de Einstein y el esquema de Jordan [33]. Por lo tanto, dado un modelo cosmológico, se deberá fijar el esquema físico y discutir los resultados en dicho esquema, aunque por supuesto la equivalencia matemática entre ambos permite tratar los cálculos en el esquema en el que estos se reduzcan a su forma más simple. Con esta afirmación no queremos decir que una evolución dada del

universo se pueda describir en un sólo esquema; de hecho, parecería posible reconstruir el potencial de un modelo de quintaesencia o la función del Lagrangiano  $f(R)$ , respectivamente, para describir una evolución particular, aunque estos modelos reconstruidos no tendrían porque estar, en general, relacionados mediante una transformación conforme. En el caso de los modelos reconstruidos mencionados habría que buscar alguna cantidad observable que pudiera, entonces, establecer diferencias entre ellos.

Acabamos de mencionar que los resultados de un cierto modelo cosmológico deben ser referidos al esquema físico, aunque no hemos elegido ninguno de estos dos esquemas como tal. Obviamente, dado el contenido de la presente memoria, se podría intuir cierta predilección por el esquema de Einstein, aunque no nos aventuraremos a realizar tal afirmación hasta que los datos provenientes de las observaciones futuras puedan expresarse de forma rotunda en este sentido. Por supuesto, hoy en día parece que la relatividad general es una teoría con una base más sólida que las teorías- $f(R)$ , ya que en éstas, frecuentemente, se fija la función  $f(R)$  a posterior para modelar un comportamiento deseado, es decir, seleccionando la teoría particular fenomenológicamente. Sin embargo, en el caso hipotético de que una cierta función  $f(R)$  resultara privilegiada ante las demás por los datos provenientes de las observaciones futuras, y si ésta proporcionara incluso resultados más satisfactorios que la teoría de Einstein, esa teoría particular sería analizada en profundidad, desarrollándose una mejor comprensión sobre sus implicaciones teóricas y, tal vez, una interpretación sobre las posibles cantidades conservadas que implicase en un marco cosmológico, si fuera el caso.

## Capítulo 6

# De Sitter: Nucleación de una burbuja Coleman-De Luccia.

Ya hemos visto como la descripción de la expansión acelerada del universo expresada en términos de la energía oscura podría implicar la aparición de nuevos fenómenos cosmológicos sorprendentes, como finales del mundo o la influencia decisiva de ciertos objetos astronómicos. El lector escéptico podría pensar que hemos planteado un escenario ilusorio debido a la suposición de una sustancia heterodoxa no sólo como una componente de nuestro universo, sino con mucho su principal componente, ignorando la posible explicación de la expansión acelerada como inducida por una constante cosmológica, que muchos consideran la explicación más simple de este fenómeno. La respuesta obvia a este tipo de afirmaciones consiste en recordar que los escenarios planteados en esta memoria son tan físicos como los que se pudieran derivar del uso de esta constante, al estar apoyados por las observaciones en la misma medida, y que el uso de ésta también produciría la violación de la condición de energía fuerte en un modelo acelerado. Sin embargo, creemos necesario comentar en este capítulo ciertos temas relativos a la constante cosmológica para no desatender esta importante posibilidad.

Por supuesto, dedicar un capítulo a la constante cosmológica sería tratar de abordar una de las cuestiones principales de la física, con influencia en distintas ramas de ésta, y, aunque sería de gran interés, está fuera de los objetivos de esta memoria y probablemente requeriría el desarrollo de otra que se encargase de este tema exclusivamente. Por lo tanto, lejos de aventurarnos a intentar hacer un repaso completo de las consideraciones relativas a esta constante, nos ceñiremos a resumir su papel en cosmología.

Por otro lado, si se insiste en el uso de la constante cosmológica para describir la expansión acelerada del universo, se debe subrayar que, en este caso, el universo

tendrá un comportamiento similar al de un universo de Sitter en el futuro. Este universo no supondría un escenario más ortodoxo que los expuestos en esta memoria, condenado a una aburrida muerte térmica como se podría pensar a primera vista, ya que en dicho escenario podrían producirse los fenómenos más sorprendentes siempre que le permitamos evolucionar durante un tiempo suficiente, que es precisamente lo que le sobra a un universo de Sitter.

Así, en la sección 6.1 repasaremos el papel de la constante cosmológica en cosmología, mostrando como esta constante ha sido un recurso frecuentemente utilizado para corregir las aparentes discrepancias entre las observaciones y la relatividad general, mencionando brevemente los posibles problemas teóricos que conlleva plantearse la existencia de ésta. Así mismo señalaremos ciertos fenómenos sorprendentes que podrían aparecer en el futuro de un universo dotado de una constante cosmológica.

Uno de estos fenómenos, la nucleación de una burbuja de Coleman-de Luccia, será considerado en algo más de detalle al plantear la posible foliación del espacio-tiempo resultante mediante hipersuperficies de curvatura extrínseca media constante (CMC) (sección 6.2). Con este propósito, repasaremos ciertas nociones básicas del espaciotiempo de Sitter (subsección 6.2.1), necesarias para estudiar el pegado de una burbuja de Coleman-de Luccia en su interior (subsección 6.2.2) y la foliación de este espaciotiempo mediante hipersuperficies CMC (subsección 6.2.3).

Finalmente, en la sección 6.3 expondremos algunos comentarios que pueden ser realizados a partir de los resultados obtenidos en este capítulo.

## 6.1. Papel de $\Lambda$ en cosmología.

**Origen.** Como es bien conocido, fue el mismo Einstein quien, en 1917, decidió modificar su teoría de la relatividad general introduciendo en sus ecuaciones un término cosmológico,  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , con  $\Lambda > 0$ , en su búsqueda de una solución cosmológica que describiera a un universo estático. Este nuevo término le permitió modelar a un universo lleno de materia en equilibrio eterno, estado que se creía era el de nuestro universo, considerando una curvatura espacial positiva.

Ese mismo año, de Sitter encontró otra solución cosmológica de las ecuaciones de Einstein considerando un universo vacío. Sin embargo, la ausencia de contenido material en este modelo no lo convertiría ni mucho menos en trivial, ya que al haber considerado que  $\Lambda > 0$  el espaciotiempo estaría curvado y poseería una dinámica. Parece que estas consecuencias incomodaron a Einstein que vio como la modificación que había introducido en su teoría conllevaba consecuencias contradictorias con respecto a sus

planteamientos iniciales [192].

**Rechazo.** La evidencia sobre la expansión del Universo proveniente de las observaciones en 1929, que podía ser explicada sin la utilización de una constante cosmológica como había sido mostrado por Friedmann en 1922, provocaron que Einstein abandonara, finalmente, el uso del término cosmológico que pensaba no había tenido otra utilidad que restar belleza a su teoría [192]. Es más, en 1930 Eddington demostró que el modelo estático de Einstein era violentamente inestable, ya que cualquier pequeña perturbación lo haría colapsar o expandirse indefinidamente.

**$\Lambda$  sobrevive.** Sin embargo, el hecho de que Einstein prescindiera de la constante cosmológica no provocó, ni mucho menos, la desaparición de esta constante del ámbito cosmológico<sup>1</sup>. En esa época las mediciones de la constante de Hubble,  $H_0$ , indicaban que, ya que un modelo dominado por materia se expande de forma decelerada presentando una edad menor que el inverso de dicha constante, la edad del universo debía ser menor que la edad de la Tierra y de las estrellas, entrando así en grave contradicción. El modelo de Lemaître, espacialmente cerrado y con un valor de la constante cosmológica algo mayor al del modelo de Einstein, presentaba una fase inicial de expansión, seguida por una época casi-estática, en la que el universo mantenía un tamaño aproximadamente constante durante cierto intervalo de tiempo, evolucionando después a una expansión acelerada. Esta última fase presentaba una edad mayor que el periodo de Hubble,  $H_0^{-1}$ , lo que produjo un gran interés en este modelo y, por lo tanto, en la consideración de la constante cosmológica. Es más, Lemaître pensaba que su modelo ofrecía un escenario ideal para la formación de las galaxias en la época casi-estática intermedia.

**$\Lambda$  innecesaria.** La aparente contradicción entre los modelos cosmológicos con  $\Lambda = 0$  y la edad del Universo comenzó a relajarse al obtenerse mejores datos observacionales de la constante de Hubble  $H_0$ , cuyas primeras estimaciones eran bastante toscas. Por otro lado, Brecher y Silk [194] estudiaron la posible formación de estructuras en la época casi-estática del modelo de Lemaître, concluyendo que esta época sólo podría explicar la formación de estructuras mediante la imposición de restricciones demasiado fuertes en los parámetros involucrados, lo que daba al modelo un carácter bastante artificial. Así, aunque no todos los modelos de este tipo implicaban inestabilidades necesariamente, la gran mayoría no explicaban por sí mismos la formación de estructuras.

---

<sup>1</sup>Dos ejemplos de modelos cosmológicos considerados en ese periodo que hacían uso de la constante cosmológica son el universo de Lemaître, que trataremos en mayor detalle y que fue el primero en considerar que la edad del universo debía ser finita, y el universo de Eddington, con un pasado eterno. Ambos modelos fueron considerados por motivaciones muy diferentes [193].

**Breve resurrección.** A finales de los años 60 parecía que había una concentración de cuásares entorno al corrimiento al rojo  $z \simeq 1,95$ , lo que fue interpretado considerando la existencia de una época casi-estática del modelo de Lemaître, caracterizada por  $a = a_0/2,95$ , durante la que se formaron los cuásares [195]. Aunque esta idea no conllevó ninguna respuesta negativa, no se tardó mucho en observar la existencia de cuásares a mayores distancias, descartándose por ello los modelos con una época casi-estática larga y haciendo innecesaria incluso la consideración de los que no fueron descartados para explicar las observaciones.

**Actualidad.** En 1975 Gunn y Tinsley publicaron un artículo en la revista *Nature* con el título “Un universo acelerado” [196]. En este trabajo, que se adelantó más de veinte años a la evidencia proporcionada por las observaciones provenientes de las Supernovas Ia [1; 2], Gunn y Tinsley expresaban su temor sobre la posible necesidad de “desempolvar” una constante que había sido re-considerada una y otra vez en cosmología. Aunque estos autores dejaban la puerta abierta para que futuros datos más precisos provenientes de las observaciones descartasen esta posibilidad, hoy en día la evidencia de la expansión acelerada del Universo es abrumadora y, como no, la constante cosmológica ha sido resucitada una vez más. Sin embargo, el regreso del parche favorito de la teoría de Einstein, podría hacernos sospechar que esta constante, más que encerrar los efectos relativos a una cierta energía de vacío proveniente de otras ramas de la física, parecería esconder nuestro desconocimiento sobre la propia teoría o sus límites. De esta forma, parece necesario considerar otros posibles escenarios que puedan explicar, por sí mismos o combinados con esta constante, la aceleración de nuestro universo.

**Posibles problemas.** El conocido “problema de la constante cosmológica” se refiere a que el valor medido de dicha magnitud difiere unos 120 órdenes de magnitud de la contribución de la física de partículas a la energía de vacío, si consideramos que la relatividad general es válida hasta la escala de Planck. Resúmenes exhaustivos sobre este problema fueron realizados por Weinberg [154] y Carroll, Press y Turner [197], cuando se consideraba difícil explicar una constante cosmológica nula una vez que los físicos de partículas realizaron este cálculo tentativo. Por supuesto, es posible que otras contribuciones cancelen esta cantidad o que el cálculo deba ser realizado mediante otras consideraciones, aunque, como indicó Carroll en un resumen más actualizado sobre el tema [198], parecería incluso más difícil justificar el valor pequeño observado de esta constante que un valor nulo. Sin embargo, debemos subrayar que este problema podría ser simplemente aparente y que, por consideraciones antrópicas, la constante cosmológica tomara este valor simplemente porque es el que tiene que tomar para que nosotros podamos estar aquí midiéndola. Este escenario, que puede asociarse con



un principio antrópico demasiado fuerte, podría aún ser relajado si consideramos que nuestro universo, con este valor de la constante cosmológica, no es sino una de las posibles regiones que pueden existir con distintos valores para dicha constante [151].

Por otra parte, también debemos mencionar el llamado “problema de la coincidencia” [199] (o nuevo problema de la constante cosmológica en la denominación de Weinberg [200]), que se basa en el hecho de que la fracción de la energía de la constante cosmológica  $\Omega_{\Lambda,0}$  es en la actualidad del orden del de la materia  $\Omega_{m,0}$ , lo que podría plantear algo más que una mera coincidencia y señalar la existencia de un problema real, ya que para obtener estas cantidades en la actualidad las condiciones iniciales deberían fijarse demasiado cuidadosamente. Este problema también se plantearía en muchos modelos de energía oscura dinámica, aunque no en todos [199]. No obstante, en este caso en mayor medida que en el anterior, debemos señalar que este problema podría no ser tal, ya que si el valor  $\Omega_{\Lambda,0}$  fuera mucho mayor en la actualidad nos encontraríamos ya en una época bastante oscura del universo y, si fuera mucho menor, el universo sería demasiado joven para albergar vida en él.

**$\Lambda$ : fenómenos sorprendentes en un universo de Sitter.** Si la constante cosmológica fuera el tipo de energía oscura que domina nuestro universo, el futuro de éste sería un espaciotiempo de Sitter eterno<sup>2</sup>, en el que la materia habría sido infinitamente diluida por la expansión cósmica. Inicialmente se pensaba que un futuro de este tipo conllevaría la muerte térmica, un estado en el que la expansión habría conducido a la situación de que cada componente del universo estaría fuera del contacto causal de los demás componentes y la entropía del sistema habría alcanzado su valor máximo. Sin embargo, teniendo en cuenta los efectos cuánticos, el escenario resultante podría ser muy diferente.

En 1980, Coleman y de Luccia consideraron que el universo de Sitter podría ser entendido como un falso vacío que, tarde o temprano, decaería en el vacío verdadero [34]. Este proceso sería interpretado por una observadora que viviese en el universo de Sitter inicial como la nucleación de una burbuja que empezaría a crecer a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, destruyendo el mundo en el que vive. A pesar de que un fenómeno de este tipo implicaría un final catastrófico para el universo inicial, estos procesos fueron considerados con agrado dentro del paradigma inflacionario (véase, por ejemplo, Refs. [152; 201], y la Ref. [202] para consideraciones cualitativas), proporcionando una posible forma de relajar la necesidad de las consideraciones antrópicas en el sentido antes mencionado. Es más, estas burbujas también podrían suponer escenarios

---

<sup>2</sup>Este futuro también sería el de modelos de energía oscura que se comportaran como una constante cosmológica a partir de cierto momento.

interesantes en el futuro de un universo dominado por  $\Lambda$  [203], como podría ser el nuestro, al tener en cuenta que la probabilidad de nucleación de una burbuja con un falso vacío es no nula [204]. Así, parece que nuestro universo con una época inflacionaria inicial y una expansión acelerada final, podría ser considerado como una burbuja que se nucleó en un universo progenitor y/o un universo que dejaría de existir al dar lugar a otro que aparecería como una burbuja en el interior de éste.

Por otro lado, la nucleación de una burbuja Coleman-de Luccia no sería el único fenómeno sorprendente que podría tener lugar en este universo. Teniendo en cuenta que el horizonte del universo de Sitter emite radiación térmica [123], sería de esperar que este sistema alcanzara un equilibrio térmico en el que permaneciera para siempre. Sin embargo, esto sería así siempre que no consideráramos intervalos de tiempos suficientemente largos,  $T_R \sim \exp S$ . Cuando este universo alcanzara el tiempo de recurrencia podría volver a un estado inicial [151] que, sin embargo, no parece muy probable fuera compatible con un universo como el nuestro [205]. Es más, se ha llegado incluso a plantear la “paradoja de los cerebros de Boltzman”, que afirma que, según las teorías existentes, sería mucho más probable que un cerebro apareciera de la nada que la presencia de un observador como nosotros (véase la Ref. [206] y las referencias que contiene para consideraciones rigurosas y la Ref. [207] para una introducción cualitativa al problema). Esta paradoja, sin embargo, se considera más bien como una prueba de la necesidad de una mejor comprensión de las teorías involucradas.

## 6.2. Foliación de un de Sitter con una burbuja Coleman-De Luccia de Sitter en su interior por hipersuperficies CMC.

Para “contar” los eventos que suceden en un espaciotiempo dado, podríamos considerar una cierta foliación del mismo mediante hipersuperficies espaciales, de tal forma que cada evento estuviera en una y sólo una de estas hipersuperficies. Como es bien sabido, la relatividad general por sí misma no nos proporciona un tiempo privilegiado así que, en principio, tendríamos una gran libertad, pudiendo considerar la foliación que nos resulte más simple o que deseemos por cualquier razón, siempre que estemos seguros de que la foliación considerada es tal que no contemos el mismo evento dos o más veces.

En modelos cosmológicos FLRW, dada su simetría, parece haber un tiempo, o conjunto de tiempos, con respecto al que resulta natural descomponer el espaciotiempo; estos son el tiempo cósmico y cualquiera con su misma dirección. Sin embargo, supon-

gamos que queremos comparar o componer un cierto conjunto de espaciotiempos, cada uno de ellos foliado en hipersuperficies con algún valor asociado a cada una de ellas, en nuestra búsqueda de algún resultado final. En este caso, si todos los espacios considerados no fueran del tipo FLRW, ya no podríamos considerar en cada uno de ellos la foliación por hipersuperficies de tiempo cósmico constante. En particular, en el caso de un espaciotiempo de Sitter con una burbuja de Sitter en su interior, exceptuando la situación trivial en el que ambos de Sitter son el mismo ( $\Lambda = \Lambda_b$ ), no existe un tiempo cósmico “global”, ya que éste es distinto en las dos regiones.

Otra opción sería considerar una foliación por hipersuperficies con curvatura extrínseca media constante (CMC). Cada una de estas hipersuperficies estaría caracterizada por el valor de su curvatura extrínseca (segunda forma fundamental) media (la traza de su curvatura extrínseca,  $K$ ) que, por definición de la foliación CMC, es constante a lo largo de la hipersuperficie. Esta foliación parecería más general ya que la única condición que estamos imponiendo a la coordenada temporal asociada al vector ortogonal de estas hipersuperficies, es que sea tal que produzca un valor  $K = \text{constante}$  en la hipersuperficie, lo que parece una noción más universal que podría ser considerada en distintos espaciotiempos.

Es más, Page ha sugerido, [208], que una foliación de este tipo podría ser de crucial interés al aplicar un nuevo enfoque del problema de la medida. Este enfoque consistente en la asignación del mismo peso, para la obtención de la probabilidad total, a hipersuperficies con la misma densidad de cada clase de observaciones, independientemente de su volumen. Sin embargo, en el mismo trabajo [208], Page también señaló que en un espaciotiempo de Sitter que contuviera una burbuja Coleman-De Luccia Minkowski en su interior, esta foliación no sólo no sería completa, es decir, no cubriría todo el espaciotiempo, sino que ni siquiera cubriría la región de nuestra existencia, haciendo que nuestras medidas no contribuyeran a las medidas del espaciotiempo total si éstas fueran definidas a través del uso de hipersuperficies CMC. Por lo tanto, aunque podría parecer que un comportamiento de este tipo también debería recuperarse en el caso de que la burbuja contuviera un de Sitter, con distinto valor de la constante cosmológica que el espacio exterior, se necesitaría un análisis más delicado para comprobar si el uso de este tipo de hipersuperficies es o no capaz de cumplir los propósitos esperados.

En esta sección consideraremos la posible foliación mediante hipersuperficies CMC de un universo de Sitter con una burbuja de Coleman-de Luccia, también de Sitter, en su interior. Este estudio no sólo posee el posible interés particular ya mencionado, sino el comportar si existe alguna forma en la que sea posible considerar una foliación privilegiada que pudiera extenderse a través de estos dos universos. Para este propósito, primero repasaremos algunas características bien conocidas del espaciotiempo de

Sitter que serán de interés para nuestras consideraciones (6.2.1); después, al considerar la nucleación de una burbuja en este espaciotiempo, estudiaremos las condiciones de pegado que se deben cumplir en la frontera entre estos dos espacios, es decir, en la pared de la burbuja (6.2.2); finalmente, obtendremos una foliación de este espaciotiempo en términos de hipersuperficies CMC y aunque, como en el caso de la burbuja Minkowski, esta foliación no cubre todo el espaciotiempo, puede comprobarse que, al menos, podría cubrir nuestra existencia bajo determinadas condiciones.

### 6.2.1. Nociones básicas.

Como vamos a considerar la posible nucleación de un universo en nuestro universo, o de nuestro universo en otro, por medio de una burbuja Coleman-De Luccia [34] con un espaciotiempo de Sitter en su interior, la exposición que vamos a presentar será aplicable a ambos espacios. Denotaremos con el subíndice  $b$  a las cantidades relacionadas con el espacio interior cuando esta distinción sea necesaria.

Es bien conocido (véase, por ejemplo, [3]) que el espaciotiempo de Sitter puede ser representado como el 4-hiperboloide

$$-v^2 + w^2 + (x^i)^2 = \alpha^2 \quad (6.2.1)$$

con  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $\alpha = \sqrt{3/\Lambda}$  y  $\Lambda$  la constante cosmológica, embebido en un espaciotiempo plano 5-dimensional

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + (dx^i)^2. \quad (6.2.2)$$

Introduciendo en el hiperboloide nuevas coordenadas tales que

$$\begin{aligned} v &= \alpha \sinh(t/\alpha), \quad w = \alpha \cosh(t/\alpha) \cos \eta, \\ x^1 &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \eta \cos \theta, \quad x^2 = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \eta \sin \theta \cos \phi, \\ x^3 &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \eta \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

la métrica puede ser exhibida en la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) [d\eta^2 + \sin^2 \eta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (6.2.4)$$

con  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Aparte de las singularidades aparentes debido al uso de coordenadas esféricas en los extremos de  $\eta$  y  $\theta$ , estas coordenadas cubren completamente el hiperboloide.

Un espaciotiempo de este tipo, puede ser foliado de forma completa al considerar las hipersuperficies de tiempo cósmico constante. La curvatura extrínseca de cada

hipersuperficie de este tipo es

$$K_{ab} = -N_{a;b} = -\frac{\sinh(t/\alpha)}{\alpha \cosh(t/\alpha)} \gamma_{ab}, \quad (6.2.5)$$

donde  $N_a$  y  $\gamma_{ab}$  son el vector ortonormal a la hipersuperficie y la métrica de la hipersuperficie, respectivamente. De esta forma, la traza de su curvatura extrínseca es

$$K \equiv K_a^a = -3 \frac{\sinh(t/\alpha)}{\alpha \cosh(t/\alpha)}. \quad (6.2.6)$$

Así, estas hipersuperficies son hipersuperficies CMC, cada una de ellas dada por un cierto valor de  $t$ . Se puede ver fácilmente que, debido a la convención de signos utilizada,  $K > 0$  cuando el universo se contrae y  $K < 0$  cuando se expande. Es más,  $K = 0 \Leftrightarrow t = 0$  y  $K \rightarrow \mp 3/\alpha$  cuando  $t \pm \rightarrow \infty$ , por lo que, si consideráramos a  $K$  como a un tiempo privilegiado<sup>3</sup>, éste cubriría todo el espaciotiempo al variar en el intervalo finito  $[-3/\alpha, 3/\alpha]$ , o  $[-3/\alpha, 0]$  si nos restringimos a la fase que no se contrae.

Si la burbuja tiene una densidad de energía,  $\rho_b$ , menor que la densidad de energía del espaciotiempo de Sitter inicial,  $\rho$ , lo que implica  $\alpha_b > \alpha$ , la situación resultante representará el decaimiento de un falso vacío en un vacío verdadero, tal y como fue estudiado por Coleman y De Luccia, [34]. Sin embargo, si las densidades de energía son mayores que cero, como es el caso, el proceso inverso también sería posible, al menos en principio, es decir, una burbuja de falso vacío podría aparecer y expandirse en el vacío verdadero, [204], implicando  $\alpha_b < \alpha$ . Por lo tanto, inicialmente la única restricción que fijaremos en  $\alpha$  y  $\alpha_b$  es que tomen valores positivos.

### 6.2.2. Pegado de la burbuja.

La nucleación de una burbuja debería ser un proceso que respetara la regularidad del espaciotiempo, por lo que parece necesario requerir que las condiciones de pegado, estudiadas inicialmente por Israel [139], se cumplan en la pared de la burbuja.

Siguiendo un procedimiento similar al mostrado en la Ref. [203] para el caso en el que las coordenadas 4-dimensionales no cubren todo el hiperboloide, la trayectoria de la pared de la burbuja, que, sin pérdida de generalidad, consideraremos se crea en el espacio exterior a  $t = 0$  y centrada en  $\eta = 0$ , puede fijarse en  $w^* = D$ . Ahora bien, considerando  $D > 0$ , tendremos  $D < \alpha$  para que la burbuja esté dentro del espaciotiempo exterior<sup>4</sup>. A través del cambio (6.2.3), obtenemos entonces la ecuación

<sup>3</sup>Realmente este supuesto tiempo privilegiado sería proporcional a  $K$ , [209].

<sup>4</sup>El valor particular de  $D$  depende del valor de las dos constantes cosmológicas involucradas en el problema, así como del valor de la densidad superficial del tensor energía-momento en la pared, consi-

de la trayectoria de la pared en el espaciotiempo exterior en términos de las coordenadas 4-dimensionales; esta es

$$\eta^*(t) = \arccos \left[ \frac{D}{\alpha \cosh(t/\alpha)} \right], \quad (6.2.7)$$

donde utilizamos  $*$  para referirnos a la trayectoria<sup>5</sup>. Por lo tanto, ya que  $D = \alpha \cos[\eta^*(t=0)]$ , la constante  $D$  es proporcional al tamaño inicial de la burbuja en el espacio exterior. La región del espacio exterior está descrita mediante la métrica (6.2.4) con  $\eta^* \leq \eta \leq \pi$ , o, equivalentemente, por la métrica (6.2.2) con la condición (6.2.1) y  $w \geq D$ . Por lo tanto, vista desde fuera y considerando el plano  $(t, \eta)$ , la burbuja se crea de forma tal que su pared se define inicialmente a  $t = 0$  y  $\eta = \arccos(D/\alpha)$  (lo que está bien definido ya que  $D < \alpha$ ) y tenderá a  $\eta \rightarrow \pi/2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , cubriendo así toda su región causal en el espacio exterior.

La primera condición de pegado<sup>6</sup> puede ser impuesta en el espaciotiempo 5-dimensional de forma más simple que en el 4-dimensional, ya que evaluando este primero en la pared obtenemos

$$ds^2|_{\text{pared}} = -dv^2 + (dx^i)^2, \quad (6.2.8)$$

con la condición

$$-v^2 + (x^i)^2 = \alpha^2 - D^2. \quad (6.2.9)$$

Ahora, considerando que la pared en el espacio interior está descrita por una trayectoria arbitraria  $w_b^* = F(v_b, x_b, y_b, z_b)$ , la métrica en el espaciotiempo interior en la pared se puede escribir como

$$ds_b^2|_{\text{pared}} = - \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial v_b} \right)^2 \right] dv_b^2 + \frac{\partial F}{\partial v_b} \frac{\partial F}{\partial x_b^i} dv_b dx_b^i + \left[ 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_b^i} \right)^2 \right] (dx_b^i)^2. \quad (6.2.10)$$

Según la condición de pegado, debemos requerir  $ds^2|_{\text{pared}} = ds_b^2|_{\text{pared}}$ , lo cual se cumple si  $F = D_b$ ,  $v = v_b$  y  $x^i = x_b^i$  que, teniendo en cuenta la Eq. (6.2.9), implica  $D_b^2 = D^2 + \alpha_b^2 - \alpha^2$ .

---

derada fina, la cual a su vez, depende de la forma explícita del potencial particular considerado para el campo que presenta los dos mínimos [210; 211]. Nosotros dejaremos esta constante sin especificar, para no restringirnos a un caso particular, teniendo siempre en cuenta que su valor no es arbitrario, una vez que se fija el modelo.

<sup>5</sup>Se debe destacar que esta trayectoria es la misma que la obtenida en la Ref. [204], donde se sigue un procedimiento diferente.

<sup>6</sup>La segunda condición de pegado relaciona la diferencia en las curvaturas extrínsecas en la pared relativas a ambos espaciotiempos con la densidad del tensor energía-momento en la pared [211]. No impondremos dicha condición ya que, como hemos mencionado, implicaría restringirnos a un modelo dado.

Por otra parte, la pared de la burbuja se puede expresar en términos de las coordenadas del espaciotiempo 4-dimensional interior de forma similar a la Eq. (6.2.7), donde ahora todas las cantidades involucradas presentarán el subíndice  $b$ . De esta forma, el pegado  $v = v_b$  y  $x^i = x_b^i$  implicará en términos de las coordenadas 4-dimensionales de ambos espacios que

$$\sinh(t_b/\alpha_b) = \alpha/\alpha_b \sinh(t/\alpha) \quad (6.2.11)$$

y

$$D_b^2 = D^2 + \alpha_b^2 - \alpha^2, \quad (6.2.12)$$

recuperando así la condición (6.2.12) que ya habíamos obtenido mediante el uso de las coordenadas 5-dimensionales.

Antes de acabar, debemos subrayar que  $\eta$  y  $\eta_b$  son coordenadas de espaciotiempos diferentes, con lo que no debemos pensar que estén relacionadas por un simple cambio de coordenadas.

### 6.2.3. Foliación mediante hipersuperficies CMC.

La foliación del espaciotiempo considerado, es decir, un de Sitter con una burbuja también de Sitter en su interior, mediante hipersuperficies de tiempo cósmico exterior constante, produce una traza de la curvatura extrínseca para cada superficie dada por la Eq. (6.2.6) en la región  $\eta \geq \eta^*$  y por

$$K = -3 \frac{\sinh(t_b/\alpha_b)}{\alpha_b \cosh(t_b/\alpha_b)} = -3 \frac{\alpha \sinh(t/\alpha)}{\alpha_b \sqrt{\alpha_b^2 + \alpha^2 \sinh^2(t/\alpha)}}, \quad (6.2.13)$$

en la región  $\eta_b \leq \eta_b^*$ ; donde hemos utilizado la condición (6.2.11). Por lo tanto, la única de estas hipersuperficies que tiene un valor de  $K$  constante si  $\alpha \neq \alpha_b$ , es la definida por  $t = 0$  en la región exterior y  $t_b = 0$  en la interior.

En el escenario 5-dimensional el espaciotiempo que estamos considerando podría ser visualizado como una cierta composición de dos hiperboloides<sup>7</sup>. Podría parecer que, dado que cada hiperboloide se curva de forma constante, si consideráramos hipersuperficies 4-dimensionales CMC, la intersección de éstas con la construcción mencionada producirá hipersuperficies 3-dimensionales con  $K$  constante, al menos en cada región, de las que podríamos seleccionar las que tengan  $K$  constante en ambas regiones.

---

<sup>7</sup>Dadas las condiciones mencionadas en la subsección anterior, podríamos pensar, al menos temporalmente, que ambos espaciotiempos 5-dimensionales son el mismo con dos condiciones diferentes para los hiperboloides, es decir, un Minkowski 5-dimensional que contiene una composición de dos hiperboloides 4-dimensionales.

Consideraremos primero una región, es decir, un hiperboloide, siendo trivial la generalización a ambas regiones. Ya que solamente estamos interesados en las hipersuperficies 4-dimensionales que intersectan al hiperboloide podemos expresarlas como  $\Sigma_4 : (x^i)^2 - G(u, v) = 0$ , lo que implica  $\Sigma_3 : \alpha^2 + v^2 - w^2 - G(u, v) = 0$  y puede ser re-expresado como  $\Sigma_3 : f(u, v) = 0$ . Por otro lado, ya que el hiperboloide está embebido en un Minkowski 5-dimensional, los hiperplanos 4-dimensionales<sup>8</sup>, que pueden ser visualizados como líneas en la sección  $(v, w)$ , tendrán curvatura extrínseca constante y nula,  $K_4$ , como puede ser demostrado. Esto sugeriría que las hipersuperficies  $\Sigma_3$ , definidas por la intersección de estos hiperplanos con el hiperboloide, podrían tener  $K_3 = K$  constante en el de Sitter, aunque, en general,  $K_3 \neq K_4$ . Sin embargo, ya que no conocemos ningún teorema que demuestre que  $K$  es constante en las circunstancias mencionadas, este hecho deberá ser comprobado y, en el caso de que lo sea, calcular su valor. Es más, si consideramos hipersuperficies  $\Sigma_3$  de este tipo, aunque con la mayor generalidad posible, podremos seleccionar las que mantengan  $K$  constante al considerar la construcción de los dos hiperboloides, imponiendo ciertas condiciones de regularidad en la pared.

El vector normal de una hipersuperficie  $\Sigma_3 : f(u, v) = 0$  general embebida en el de Sitter exterior es

$$N_\mu = \frac{\alpha \cosh(t/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \dot{f}^2 - f'^2}} (\dot{f}, f', 0, 0), \quad (6.2.14)$$

donde  $\dot{\phantom{x}} \equiv \partial_t$ ,  $' \equiv \partial_\eta$  y hemos considerado que  $N_\mu$  es de tipo tiempo. Teniendo en cuenta el operador de proyección en la hipersuperficie  $h_\nu^\mu = g_\nu^\mu + N^\mu N_\nu$  podemos calcular la curvatura extrínseca sin suponer que estamos tratando con coordenadas adaptadas lo que, en general, no será el caso. Así, tenemos [3]

$$K_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta N_{\alpha;\beta}. \quad (6.2.15)$$

Después de algunos cálculos, obtenemos que la traza de la curvatura extrínseca  $K = K_\mu^\mu$  es

$$K = \frac{\alpha \cosh(t/\alpha) t_1(t, \eta, \alpha) + t_2(t, \eta, \alpha)}{t_3(t, \eta, \alpha)}, \quad (6.2.16)$$

con

$$t_1(t, \eta) = \dot{f}^2 f'' + f'^2 \ddot{f} - 2\dot{f} f' \dot{f}' - 3\alpha \cosh(t/\alpha) \sinh(t/\alpha) \dot{f}^3 + 2f' \dot{f}^2 \frac{\cos \eta}{\sinh \eta}, \quad (6.2.17)$$

$$t_2(t, \eta) = 2f'^2 \left[ 2\sinh(t/\alpha) \dot{f} - \frac{f' \cos \eta}{\alpha \cosh(t/\alpha) \sinh \eta} \right], \quad (6.2.18)$$

---

<sup>8</sup>Debemos destacar que los hiperboloides de tipo tiempo también tendrán  $K_4$  constante, aunque en este caso consideraremos hiperplanos por ser más fáciles de tratar.



y

$$t_3(t, \eta) = \left[ \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \dot{f}^2 - f'^2 \right]^{3/2}. \quad (6.2.19)$$

Ahora podríamos obtener una solución del problema imponiendo  $K = K_b = \text{const.}$  (con  $K_b$  con una forma similar a  $K$  pero con el subíndice  $b$  en las cantidades involucradas), y teniendo en cuenta las condiciones de regularidad en la pared. Sin embargo, dado que el primer paso de este procedimiento conllevaría la resolución de una ecuación diferencial no-trivial, consideraremos el argumento mencionado anteriormente, tomando hipersuperficies que puedan ser vistas como líneas en la sección  $(v, w)$ . Estas hipersuperficies están descritas en el espaciotiempo de Sitter 4-dimensional mediante

$$f(t, \eta) = \sinh(t/\alpha) - b \cosh(t/\alpha) \cos \eta - a = 0, \quad (6.2.20)$$

lo que implica

$$\cosh(t/\alpha) = \frac{ba \cos \eta + \sqrt{a^2 + 1 - b^2 \cos^2 \eta}}{1 - b^2 \cos^2 \eta} \text{ en la hipersuperficie,} \quad (6.2.21)$$

donde hemos descartado la solución con un signo menos frente a la raíz porque no se reduce al valor esperado para el caso de la foliación de tiempo propio constante, implicando hiperplanos horizontales,  $b = 0$ . Teniendo en cuenta las Eqs. (6.2.20) y (6.2.21), las derivadas de la función  $f(t, \eta)$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\sqrt{a^2 + 1 - b^2 \cos^2 \eta}}{\alpha}, \quad \ddot{f} = \frac{a}{\alpha}, \quad f' = b \cosh(t/\alpha) \sin \eta \\ f'' &= b \cosh(t/\alpha) \cos \eta, \quad \dot{f}' = \frac{b}{\alpha} \sin \eta [b \cosh(t/\alpha) \cos \eta + a]. \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Insertando entonces estas expresiones en (6.2.16) y sustituyendo las Eqs. (6.2.20) y (6.2.21) en sucesivas simplificaciones, la traza de la curvatura extrínseca se puede expresar como

$$K = -3 \frac{a}{\alpha \sqrt{a^2 + 1 - b^2}}, \quad (6.2.23)$$

la cual, obviamente, es constante para cada hipersuperficie. Hasta ahora sólo hemos considerado el espaciotiempo de Sitter exterior, por lo que deberíamos poder recuperar, como hemos mencionado, la foliación de tiempo propio. Es fácil ver que, tomando  $b = 0$ , la Eq. (6.2.23) efectivamente se reduce a la Eq. (6.2.6).

Por otra parte, un procedimiento similar puede ser aplicado en el espaciotiempo interior, considerando hipersuperficies definidas mediante la Eq. (6.2.20) con todas las cantidades ahora referidas a este espaciotiempo. De esta forma, obtendríamos la misma traza de la curvatura extrínseca dada por (6.2.23), ahora dependiendo de  $a_b$ ,  $b_b$  y  $\alpha_b$ .

Por lo tanto, para que el tipo de hipersuperficies consideradas posean una  $K$  constante en todo el espacio, el valor de ésta en ambas regiones debería ser el mismo, es decir

$$\frac{a}{\alpha\sqrt{a^2+1-b^2}} = \frac{a_b}{\alpha_b\sqrt{a_b^2+1-b_b^2}}. \quad (6.2.24)$$

Para que las hipersuperficies sean regulares en la pared, deberemos imponer: (i) que la hipersuperficie cumpla la primera condición de pegado en la pared de la burbuja, y (ii) que el producto escalar del vector normal a cada hipersuperficie y el vector ortonormal a la pared en la intersección de ambas, sea el mismo en las dos regiones<sup>9</sup>. Teniendo en cuenta las Eqs. (6.2.7), (6.2.11) y (6.2.20), la condición (i) implica

$$bD + a\alpha = b_bD_b + a_b\alpha_b. \quad (6.2.25)$$

El vector normal a la pared puede obtenerse a partir de la Eq. (6.2.7) y el normal a las hipersuperficies CMC en el espacio exterior mediante las Eqs. (6.2.22) y (6.2.14). Estos son

$$n_\mu^w = \frac{1}{\sqrt{1-D^2/\alpha^2}}(\sinh(t/\alpha)\cos\eta, -\alpha\cosh(t/\alpha)\sin\eta, 0, 0) \quad (6.2.26)$$

y

$$N_\mu = \frac{1}{\sqrt{a^2+1-b^2}}(\cosh(t/\alpha) - b\sinh(t/\alpha)\cos\eta, \alpha b\cosh(t/\alpha)\sin\eta, 0, 0), \quad (6.2.27)$$

respectivamente. Así, la condición (ii),  $N^\mu n_\mu^w|_{\text{int}} = N_b^\mu n_{b\mu}^w|_{\text{int}}$ , utilizando las Eqs. (6.2.7) y (6.2.20), implica

$$\frac{aD/\alpha + b}{\sqrt{(1-D^2/\alpha^2)(a^2+1-b^2)}} = \frac{a_bD_b/\alpha_b + b_b}{\sqrt{(1-D_b^2/\alpha_b^2)(a_b^2+1-b_b^2)}}. \quad (6.2.28)$$

Por lo tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones, Eqs. (6.2.24), (6.2.25) y (6.2.28), con cuatro incógnitas que tiene dos soluciones reales<sup>10</sup>

$$a = -b\frac{\alpha}{D}, \quad a_b = -b\frac{\alpha_b}{D}, \quad b_b = b\frac{D_b}{D}, \quad (6.2.29)$$

y

$$a = -b\frac{\alpha(\alpha^2 - \alpha_b^2)}{-2\alpha\alpha_bD_b + D(\alpha^2 + \alpha_b^2)}, \quad a_b = b\frac{\alpha_b(\alpha^2 - \alpha_b^2)}{-2\alpha\alpha_bD_b + D(\alpha^2 + \alpha_b^2)},$$

<sup>9</sup>Esta condición se sigue de la exigencia de que exista un vector normal a la hipersuperficie regular en la pared. Ya que no podemos comparar directamente vectores definidos en diferentes espacios, el exterior y el interior, comparamos su producto escalar con el vector en la pared. Aunque esta condición, obviamente, es menos restrictiva, al menos nos permite comparar cantidades de espacios diferentes.

<sup>10</sup>Existen otras dos soluciones que dependen de  $\sqrt{D^2 - \alpha^2}$  pero, ya que  $D < \alpha$ , estas soluciones serán complejas y carecen de significado físico.

$$b_b = b \frac{D_b(\alpha^2 + \alpha_b^2) - 2D\alpha\alpha_b}{-2\alpha\alpha_b D_b + D(\alpha^2 + \alpha_b^2)}. \quad (6.2.30)$$

Mientras que la solución (6.2.30) depende de forma no trivial de los parámetros del modelo particular, la solución (6.2.29) puede ser analizada mediante consideraciones más generales, por lo que estudiaremos las hipersuperficies con (6.2.29) en mayor detalle.

### Estudio de la primera foliación.

Teniendo en cuenta las relaciones (6.2.29) en la ecuación de las hipersuperficies (6.2.20), podemos notar que estas hipersuperficies tienen la propiedad especial de ser perpendiculares a la pared,  $N^\mu n_\mu^w|_{\text{int}} = 0$ , pudiéndose expresar la traza de su curvatura extrínseca como

$$K = 3 \frac{b}{D \sqrt{1 + b^2(\alpha^2/D^2 - 1)}}, \quad (6.2.31)$$

con lo que las hipersuperficies folian la región en expansión si  $b < 0$ , siendo  $b = 0$  el caso límite. Para comprobar que las hipersuperficies están bien definidas en esta región, re-escribimos la Eq. (6.2.21) teniendo en cuenta (6.2.29), de la siguiente forma

$$t = \alpha \operatorname{arccosh} \left( \frac{-b^2 \cos \eta + \sqrt{b^2 + \lambda^2(1 - b^2 \cos^2 \eta)}}{\lambda(1 - b^2 \cos^2 \eta)} \right), \quad (6.2.32)$$

donde  $\lambda \equiv D/\alpha$ , con  $0 < \lambda < 1$ . Ya que estamos considerando en primer lugar las hipersuperficies en la región exterior, la Eq. (6.2.7) implica que la Eq. (6.2.32) deberá ser evaluada en la región  $\arccos(\lambda/\cosh(t/\alpha)) \leq \eta \leq \pi$ . Así, esta expresión estará bien definida si  $b^2 \leq 1$ , que para  $b \leq 0$  implica  $-1 \leq b \leq 0$ . Sólo la hipersuperficie  $b = -1$  en el extremo  $\eta = \pi$  divergirá. En la Fig.(6.1) representamos un ejemplo de las hipersuperficies CMC en la sección  $(t, \eta)$  del espacio exterior.

En segundo lugar, consideramos de forma similar las hipersuperficies en la región interior, obteniendo

$$t_b = \alpha_b \operatorname{arccosh} \left( \frac{-b^2 \lambda_b \cos \eta_b + \beta \sqrt{\beta^2 + b^2(1 - \lambda_b^2 \cos^2 \eta_b)}}{\beta^2 - \lambda_b^2 b^2 \cos^2 \eta_b} \right), \quad (6.2.33)$$

con  $\lambda_b \equiv D_b/\alpha_b$ ,  $0 < \lambda_b < 1$  y  $\beta \equiv D/\alpha_b$ , para la ecuación de las hipersuperficies en la región  $0 \leq \eta_b \leq \arccos(\lambda_b/\cosh(t_b/\lambda_b))$ . La relación entre estos parámetros se puede deducir teniendo en cuenta que la Eq. (6.2.12) implica  $1 - D_b^2/\alpha_b^2 = \alpha^2/\alpha_b^2 (1 - D^2/\alpha^2)$ , con lo que en el caso de una burbuja de vacío real (BVR) que se nuclee en un vacío falso ( $\alpha_b > \alpha$ ), tenemos  $0 < \beta < \lambda < \lambda_b \leq 1$ ; mientras que, si se considera una burbuja de falso vacío (BVF  $\alpha_b < \alpha$ ), obtenemos  $0 < \lambda_b < \lambda < \beta < \alpha/\alpha_b$ . Estas hipersuperficies,

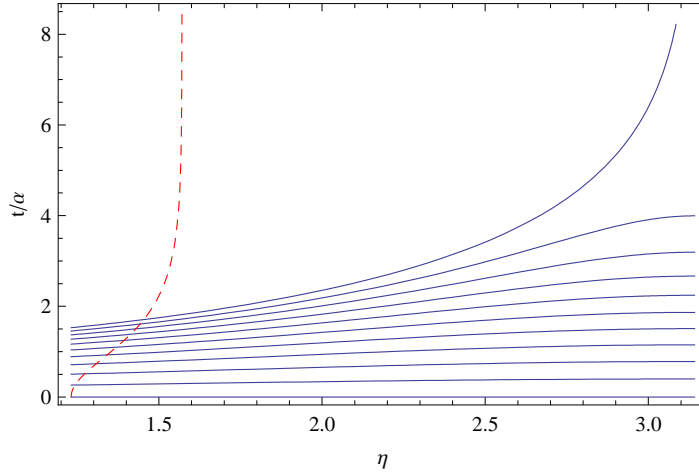


Figura 6.1: Representación de las hipersuperficies CMC según la primera solución, en la sección  $(t/\alpha, \eta)$  del espacio exterior para el valor particular  $\lambda = 0,3$ . Debe destacarse que en esta figura la región física es la que se incluye entre la pared (línea discontinua) y  $\eta = \pi$ . Aunque, de la trayectoria de la pared se puede deducir que la burbuja no cubre todo el espacio, dicha burbuja si cubre todo el horizonte visible por un observador en  $r = 0$  (con  $r = \sin \eta$ ). Las diferentes hipersuperficies CMC representadas toman valores de  $b$  que se diferencian en  $0,1$ , todos ellos pertenecientes al intervalo  $[-1, 0]$ , correspondiendo la línea superior al valor  $b = -1$  y la inferior a  $b = 0$ .

con  $-1 \leq b \leq 0$ , están bien definidas en el rango considerado<sup>11</sup> En las Fig. (6.2) y (6.3) mostramos un ejemplo de las hipersuperficies CMC en la región interior en el caso de una BVR y una BVF, respectivamente.

Por lo tanto, estas hipersuperficies están bien definidas en todo el espacio, es decir, en el exterior, en el interior y en la pared. Existe una hipersuperficie para cada valor de  $b$ , con  $-1 \leq b \leq 0$ , y, por medio de Eq. (6.2.31), podemos ver que esta foliación cubre el rango  $K \in [-3/\alpha, 0]$ , que es el mismo intervalo de  $K$  que cubría la foliación de tiempo propio constante de un de Sitter en expansión (6.2.6)<sup>12</sup>. Si cierta cantidad proporcional a  $K$  pudiera ser interpretada como un tiempo privilegiado [209], la foliación cubriría el mismo rango de este tiempo.

Sin embargo, a la vista de las Figs. (6.1), (6.2) y (6.3), es fácil notar que las hipersuperficies no cubren todo el espaciotiempo exterior ni interior a la burbuja, pero podría

<sup>11</sup>En el caso de una BVR habría un posible valor en el que el lado derecho de (6.2.33) no estuviera bien definido. Este valor corresponde con  $\cos \eta_b \rightarrow \beta/(\lambda_b |b|)$ . Sin embargo, estudiando el límite de  $\cosh(t_b/\alpha_b)$  en el valor mencionado con más cuidado, se puede ver que dicho límite permanece finito.

<sup>12</sup>Debemos destacar que, ya que hemos considerado que la burbuja se crea en  $t = 0$ , la región  $t < 0$  de nuestro espaciotiempo será simplemente un de Sitter.

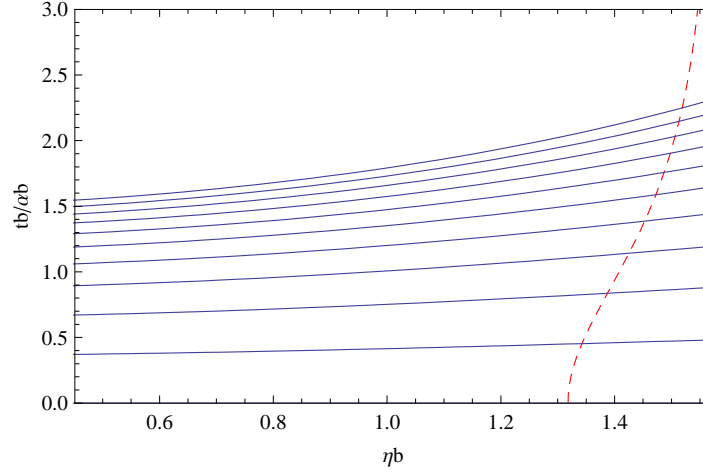


Figura 6.2: Representación de las hipersuperficies CMC en la sección  $(t_b/\alpha_b, \eta_b)$  del espacio interior, en el caso de una BVR  $\lambda_b = 1/4$  y  $\beta = 1/5$ . La región física es la que está incluida entre  $\eta = 0$  y la pared de la burbuja (línea discontinua). Las diferentes hipersuperficies CMC representadas toman valores de  $b$  que se diferencian en 0,1, todos ellos pertenecientes al intervalo  $[-1, 0]$ , correspondiendo la línea superior al valor  $b = -1$  y la inferior a  $b = 0$ .

ser que éstas fueran capaces de cubrir al menos la existencia de la mayor parte de observadores como nosotros. Así, consideraremos en primer lugar que nuestro universo es el de Sitter inicial en el que se nuclea una burbuja. En este caso, es fácil ver que cada hipersuperficie cubrirá todo el intervalo de  $\eta$  y, para cada posición fijada por  $\eta$ , entre las distintas hipersuperficies que componen la foliación cubrirán un intervalo de tiempo  $[0, t_*]$ , con  $t_*$  dado por la hipersuperficie con  $b = -1$  a ese  $\eta$ . Por ejemplo, si nos preguntamos que valor toma  $t_*$  al considerar una posición muy cercana a la pared, este valor podrá ser aproximado por la intersección entre la hipersuperficie máxima, (6.2.32) con  $b = -1$ , y la pared, Eq. (6.2.7), que es

$$t_*/\alpha = \operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{1 + \lambda^2(\lambda^2 - 1)}}{\lambda} \right). \quad (6.2.34)$$

Por lo tanto,  $t_* \rightarrow \infty$  si  $\lambda \rightarrow 0$  y  $t_* \rightarrow 0$  si  $\lambda \rightarrow 1$ , es decir, si la burbuja se nuclea con un tamaño inicial mucho menor que el del universo, la foliación podría llegar a cubrir la existencia de observadores como nosotros, mientras que si el tamaño inicial de la burbuja es cercano al tamaño del universo, esta foliación cubriría muy poco espacio exterior, al menos un sector muy reducido de la región cercana a la pared. Sin embargo, en el segundo de estos dos casos extremos, no deberíamos preguntarnos si la foliación cubre nuestra existencia ya que, al nuclearse una burbuja de estas dimensiones,

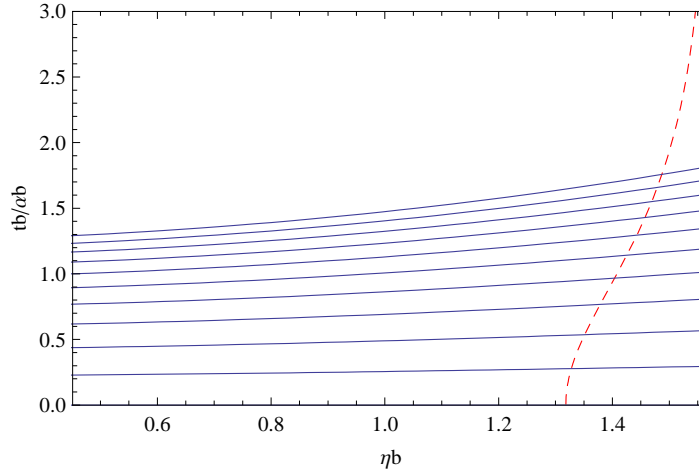


Figura 6.3: Representación de las hipersuperficies CMC en el caso de una BVF con  $\lambda_b = 1/4$ ,  $\beta = 1/3$  y  $b$  tomando los mismos valores que en la representación BVR dada en la Fig. (6.2).

si dispusiéramos de una teoría que produjera este tipo de valores, no habría ninguna existencia que cubrir ya que el final del mundo sería casi inmediato. Otro caso particular interesante sería  $\eta = \pi/2$ , el cual corresponde al horizonte de este espaciotiempo; en este caso tendríamos  $t_* = \alpha \operatorname{arccosh} \sqrt{1 + \lambda^{-2}}$  que, al igual que en las cercanías de la pared, tiende a infinito si la burbuja se nuclea con un tamaño muy pequeño, siendo su límite aproximadamente  $1,32\alpha$  cuando  $\lambda \rightarrow 1$ . Finalmente, como ya hemos señalado,  $t_*$  será infinitamente grande independientemente de  $\lambda$  en  $\eta = \pi$ .

Por otro lado, si consideráramos que nuestro universo es el que se nuclea dentro de un de Sitter progenitor, aunque comparando la Fig. (6.1) con las Figs. (6.2) y (6.3) podría parecer que, en este caso, la región cubierta por la foliación es mucho menor, deberemos estudiar cuidadosamente cada modelo para concluir si la foliación es o no suficiente para cubrir la mayor parte de nuestra existencia. Al igual que en el caso anterior, para una cierta posición  $\eta_b$  la foliación cubrirá un intervalo  $[0, t'_b]$ , donde ahora  $t'_b$  estará determinado por (6.2.33) con  $b = -1$ . Aunque en este caso no incluiremos una discusión general pues ésta sería mucho menos clara, al depender de dos parámetros,  $\lambda_b$  y  $\beta$ , especificados por el modelo, aún así debemos señalar que dicha discusión se podría realizar de forma similar al caso anterior, considerando ahora dos límites interesantes, la cercanía de la pared y  $\eta_b = 0$ .

Finalmente, consideraremos un ejemplo particular, donde los parámetros no corresponden a ningún modelo concreto. En este ejemplo el espaciotiempo exterior tendrá un valor de la constante cosmológica del orden de la constante cosmológica que podría ori-

ginar la expansión acelerada de nuestro Universo, esto es,  $\Lambda \sim 10^{-35}\text{seg}^{-2}$ , con lo que  $\lambda \sim D \times 10^{-17,5}\text{seg}^{-1}$ . Así, si consideráramos la nucleación de una burbuja<sup>13</sup> con  $D \leq 1\text{metro}$ , la foliación CMC cubriría una región del espacio exterior que se extendería hasta  $t_* \geq 10^{12}\text{años}$ , en la región cercana a la pared, cubriendo en el resto del espacio intervalos mayores de  $t$ . De forma tentativa, podríamos considerar que en el espacio interior a la burbuja tenemos  $\Lambda_b \sim 10^{-36}\text{seg}^{-2}$ , por lo que, mediante la Eq. (6.2.12),  $D_b \sim 9,99 \times 10^{18}\text{seg}$  para los valores mencionados en la región exterior; así, tendríamos  $t'_b \sim 10^{13}\text{años}$  cerca de la pared y  $t'_b \sim 10^{10}\text{años}$  en el centro de la burbuja.

### 6.3. Comentarios.

En este capítulo hemos repasado las aplicaciones más conocidas de  $\Lambda$  en cosmología, desde su introducción en el modelo estático de Einstein hasta su posible aplicación para describir la expansión acelerada del Universo actual. Posiblemente, se ha apelado de forma abusiva a esta constante cada vez que los datos de la época en cuestión parecían no corresponder con la teoría. Por supuesto, esto no significa que en la actualidad no nos estemos enfrentando con un fenómeno que acabe demostrando de forma necesaria que  $\Lambda$  posee un valor no nulo, pero no debemos pensar que el hecho de que dicho fenómeno pueda ser modelado mediante la introducción de esta constante implique que ésta deba ser su causante necesariamente. El hecho de que en otros momentos de la historia de la cosmología la utilización de la constante cosmológica se haya demostrado innecesaria o errónea, debería inspirarnos cierta prudencia en este sentido.

Es más, si la constante cosmológica puede ser entendida como un parámetro que debemos tener en cuenta en la teoría de la relatividad general proveniente de una teoría más fundamental subyacente, a partir de la cual la relatividad general se recupera en cierto límite, podría parecer incluso demasiado simple que la única huella de tal teoría fuera la incorporación de una constante. Tal vez, nos encontremos ante un fenómeno cuyo origen sí se debe a que los efectos de esta teoría hipotética comienzan a manifestarse aunque, en este caso, nada nos asegura que estos pudieran considerarse simplemente mediante el uso de  $\Lambda$ .

Por otro lado, hoy en día se considera que el escenario más ortodoxo para la explicación de la aceleración del Universo es considerar a la constante cosmológica como su causante. Sin embargo, un universo de este tipo llegaría a convertirse en el futuro en un modelo de Sitter lo que, como hemos visto, nos proporciona un contexto en el que los fenómenos más sorprendentes podrían manifestarse. Uno de estos fenómenos sería la

---

<sup>13</sup>Queremos reiterar que este es sólo un ejemplo; el valor particular de  $D$  dependerá, como ya hemos señalado, de ambas constantes cosmológicas y del modelo particular considerado.

posible nucleación de una burbuja en nuestro universo, que contuviera a otro universo, que se expandiría a tal velocidad que implicaría el fin de nuestro universo observable.

Al considerar en mayor detalle el espaciotiempo resultante al nuclearse una burbuja de Sitter en un universo de Sitter, con diferente constante cosmológica, hemos notado como la foliación de este espaciotiempo en términos de hipersuperficies de tiempo cósmico constante no tendría una definición unívoca, ya que este escenario tendría diferente tiempo cósmico en las diferentes regiones. Por este motivo, hemos considerado que una posible foliación privilegiada podría llevarse a cabo en términos de hipersuperficies CMC.

Así, hemos obtenido una foliación de este tipo que cumple las condiciones de regularidad necesarias. Esta foliación no cubre todo el espaciotiempo, dejando sin cubrir una región infinita del espacio interior y otra región infinita del espacio exterior, aunque también cubriría una región infinita del espacio exterior. Si esta foliación es suficiente para cubrir la existencia de observadores como nosotros, ya sea ésta considerada la región exterior o la interior, dependerá de los parámetros particulares del modelo subyacente que produce el decaimiento de un vacío en otro. Sin embargo, en el caso de que esta no fuera suficiente, no podríamos afirmar que no existe una foliación CMC que pueda cumplir nuestros propósitos ya que existen otras foliaciones de este tipo. En particular, hemos indicado otra posible foliación con la misma forma funcional que la estudiada en detalle y los parámetros dados por (6.2.30).

También a este respecto, hemos incluido un argumento según el cual podríamos obtener 3-hipersuperficies con  $K$  constante a partir de la intersección en el espacio 5-dimensional de dos 4-hipersuperficies con  $K_4$  constante, en una de las cuales consideraremos definidas las 3-hipersuperficies, que en nuestro caso son el hiperboloide de Sitter e hiperplanos. Dicho argumento no ha sido demostrado aunque nos ha ayudado a encontrar ciertas hipersuperficies de este tipo, que luego hemos comprobado cumplían la condición requerida. De esta forma, también podríamos comprobar si las 3-hipersuperficies que generarían las intersecciones de 4-hiperboloideas de género tiempo con el hiperboloide de Sitter tienen  $K$  constante al ser consideradas en el de Sitter. Si este fuera el caso, además de constituir otro indicio a favor de nuestro argumento, habríamos encontrado otra foliación por hipersuperficies CMC que, eventualmente, podría cubrir una región mayor del espaciotiempo. Es más, aunque este argumento fuera válido en general, no excluiría, al menos en principio, que pudiera haber otras hipersuperficies CMC que no pudieran ser obtenidas mediante este método. Por lo tanto, en el caso de que ninguna de las foliaciones mencionadas cumpliera nuestros propósitos, no podríamos descartar que existiera otra foliación CMC que lo hiciera.



## Capítulo 7

### Conclusiones.

A lo largo de esta memoria hemos puesto de manifiesto como el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo no sólo cambia nuestra comprensión sobre éste, sino que evidencia nuestra ignorancia sobre su futuro. La energía oscura, responsable de dicha aceleración al considerar válida la teoría de Einstein a escalas cosmológicas, sería la sustancia más abundante en nuestro Universo y dictaría su porvenir si consideramos que ésta no decae en ninguna otra sustancia.

Hemos concluido que en un espaciotiempo 4-dimensional los agujeros negros (de gusano) crecerán debido a la acreción de energía oscura con  $w > -1$  ( $w < -1$ ), decreciendo en el caso contrario. Mientras que el crecimiento de los agujeros negros no llegaría a ser lo suficientemente significativo como para producir consecuencias a escalas cosmológicas, a no ser por los posibles efectos que pueda producir la dinámica del universo en este fenómeno, los agujeros de gusano llegarían a ser infinitamente grandes antes de alcanzarse la singularidad futura en cualquier universo que muestre una singularidad en la que el parámetro de Hubble diverja, evitándose los finales cósmicos de este tipo mediante un gran viaje del universo a través de un agujero de gusano. El destino de este gran viaje podría ser otro universo u otro momento dado de la evolución del mismo universo, dependiendo del escenario considerado y, al menos localmente, respetando la causalidad en cualquier caso.

En relación a los métodos utilizados para el estudio de la acreción, queremos destacar que los casos en los que considerábamos un agujero de gusano acreciendo energía que cumplía la condición de energía nula y un agujero negro acreciendo energía fantasma eran en los que se utilizaba una aproximación del tipo fluido de prueba más fuerte. Además de que los agujeros de gusano no pueden existir si no están rodeados al menos de una cierta cantidad de material exótico, se puede notar que la naturaleza causal de los horizontes atrapantes que caracterizan ambos objetos cambiaría si estos no se

encontrasen en su entorno natural.

Si la energía oscura careciera de dinámica, es decir, si ésta fuera simplemente la constante cosmológica, dicha sustancia no sería acreta por estos objetos astronómicos. No obstante, un universo de este tipo llegaría a ser un de Sitter, en el que cualquier fenómeno que no fuese totalmente imposible podría llegar a tener lugar, en particular la formación de una burbuja Coleman-De Luccia con otro de Sitter en su interior. En relación al espaciotiempo resultante en este caso, hemos estudiado una foliación de éste mediante hipersuperficies CMC que podría cubrir la existencia de observadores como nosotros dependiendo de los parámetros del modelo. Si este no fuera el caso, hemos indicado otra posible foliación que podría ser estudiada en mayor detalle y hemos incluido un argumento que, de ser válido en general, podría ayudarnos a encontrar otras foliaciones de este tipo. Dicho argumento dice que la intersección de hipersuperficies con curvatura extrínseca constante produce una hipersuperficie, de dimensión menor, que tendrá también curvatura constante al considerar que ésta está definida en el espaciotiempo dado por una de las hipersuperficies originales.

Por otra parte, considerando una ecuación de estado del tipo gas de Chaplygin generalizado, hemos corroborado que la energía fantasma no tiene porque guiar al universo a un final del mundo desgarrado. Dependiendo de los parámetros involucrados en esta ecuación, el futuro del universo podría ser o bien regular, tendiendo asintóticamente a una evolución del tipo de Sitter, o bien presentar un nuevo final cósmico que también podría ser evitado mediante un gran viaje. Hemos llamado a este final cósmico, en el que el universo estaría infinitamente lleno de energía fantasma a un valor finito no nulo del factor cósmico de escala, la gran congelación.

También hemos puesto de manifiesto como un universo lleno de energía oscura con  $w$  constante, podría tener una evolución diferente al considerar que este universo es una brana en un modelo 5-dimensional, escenario inspirado en el modelo de Randall-Sundrum tipo 1. En este caso, tanto si dicho parametro es menor como si es mayor que menos uno, las singularidades se duplicarían haciendo que la evolución cósmica se divida en tres regiones aisladas, siendo la naturaleza de este fluido en la región intermedia distinta a la usual al presentar una densidad de energía negativa, manteniéndose la densidad de energía efectiva en la brana definida positiva. Así, hemos llamado energía oscura (fantasma) dual, al fluido con densidad de energía negativa y un parámetro  $w$  que toma valores en el mismo rango que la energía oscura (fantasma). En el límite en el que la tensión de la brana es infinitamente grande, desapareciendo los efectos característicos de este escenario, tanto la región central como este fluido desaparecen, recuperándose el mismo comportamiento que en los modelos 4-dimensionales con  $w$  constante usuales.

La consideración de un escenario de este tipo en el que la brana estuviera llena de gas de Chaplygin fantasma dual recupera los mismos comportamientos que los modelos de gas de Chaplygin fantasma en el futuro, aunque su evolución podría ser diferente en el pasado.

En los modelos 5-dimensionales considerados la evolución de los agujeros negros y de gusano es muy diferente a la que tiene lugar en los modelos 4-dimensionales. En los modelos con  $w$  constante aparecen múltiples divergencias del tamaño de estos objetos y en los modelos de gas de Chaplygin fantasma dual que presentan una gran congelación futura, esta singularidad no se evita mediante un gran viaje a través de un agujero de gusano, sino que el universo resulta engullido por un agujero negro.

La multiplicación del número de singularidades no sería, en caso de producirse, una consecuencia exclusiva de los modelos de branas. Si consideramos que la energía oscura está compuesta por una componente dinámica con  $w$  constante y una constante cosmológica negativa, el modelo resultante presenta infinitas singularidades que dividen la evolución del universo en infinitas regiones idénticas. Este esquema, que puede ser interpretado como un multiverso clásico, puede describir la época actual de nuestro universo si la componente dinámica es energía fantasma, presentado características interesantes al considerar uno de los infinitos universos de forma aislada referido a un intervalo de tiempo cósmico infinito.

Hemos mostrado como en los modelos estudiados que presentan distintas regiones aisladas de evolución del universo, se requiere una discretización de  $w$  para dotar de sentido físico a algunas de las regiones mencionadas. Esta discretización podría tener un significado más fundamental, implicando la discretización de las cantidades dinámicas del modelo.

La aceptación inicial de esta tesis, mediante la cual consideramos que el esquema físico es el esquema de Einstein, no es carente de sentido. Aunque es bien conocido que este esquema es matemáticamente equivalente al esquema de Jordan, hemos demostrado que dicha equivalencia no tiene carácter físico.

También debemos mencionar que las singularidades de los modelos considerados probablemente se suavizarían mediante un cierto tratamiento cuántico, dejando de existir, por lo tanto, el mundo clásico como tal. Este tratamiento sería necesario independientemente del valor del factor cósmico de escala que caracterizase a la singularidad.

Por otra parte, también hemos estudiado la radiación térmica de los que podrían ser considerados los objetos astronómicos naturales de los escenarios fantasmas: los agujeros de gusano. La interpretación de dicha radiación, obtenida necesariamente mediante consideraciones locales, como de naturaleza fantasma, nos ha permitido formular, al

menos de forma tentativa, sus tres leyes de la termodinámica.

Los efectos producidos por la radiación térmica deberían ser tenidos en cuenta en la evolución dinámica de los agujeros de gusano. Estos objetos no alcanzarían un estado similar al de los agujeros negros en un universo con  $w > -1$  tendiendo a desaparecer, al disponerse en los modelos fantasma de una fuente inagotable de energía para ser acretada. Sin embargo, el fenómeno de radiación térmica podría frenar el crecimiento de los agujeros de gusano, posiblemente no de una forma tan significativa como para que el gran viaje no tuviera lugar en los casos en los que éste ha sido pronosticado.

Finalmente, queremos subrayar que en un universo que contenga tanto energía fantasma como energía que cumpla la condición de energía nula, ya sea energía oscura o materia ordinaria, la propia evolución del universo produciría que la energía fantasma fuera cada vez más abundante, siempre que ésta no decayera en otro tipo de sustancia. De esta forma, bastaría una componente fantasma en el universo para que ésta fuera la responsable de su dinámica en un futuro más o menos lejano, acabando la era en la que los agujeros negros podían ser considerados objetos astronómicos comunes, e iniciando el periodo de los agujeros de gusano.

# Conclusions

Throughout this dissertation we have highlighted that the discovery of the current accelerated expansion of the Universe does not only change our understanding about it, but it also measures the extent of our ignorance about its future. Dark energy, which would be the responsible for such an acceleration when considering that Einstein theory is valid at cosmological scales, would be the most plentiful stuff in our Universe. Even more, if we consider that dark energy is not allowed to decay in another stuff, then it would dictate the future evolution of the universe.

We have concluded that black holes (wormholes) will increase their sizes due to the accretion of dark energy with  $w > -1$  ( $w < -1$ ) in a 4-dimensional model, decreasing in the opposite case. The growth of black holes would not become large enough to produce cosmological consequences, at least without taking into account the possible effects related with the dynamic evolution of the universe. On the contrary, wormholes would become infinitely large before the universe reaches its doomsday in models presenting a final singularity characterized by a divergence of the Hubble parameter. Therefore, in such models the mentioned singularity would be avoided by a big trip phenomenon. Depending on the considered framework, the final fate of the big trip could be either other universe or other state in the evolution of the same universe. In any case, such a process would respect causality, at least locally.

Regarding the methods used to study the accretion process, we want to point out that both the phantom energy accretion onto black holes and the wormhole accreting a stuff which fulfill the null energy condition, are the cases where the test fluid approximation was stronger. Besides the fact that traversable wormholes can no longer exist if they are not surrounded by a certain quantity of exotic material, one can notice that the causal nature of the trapping horizons which characterize both objects would change if they would not be considered in their natural environment.

If, instead of dark energy, it would be a cosmological constant which governed the cosmic evolution, then this stuff would not be accreted onto those astronomical objects, and the universe will become a de Sitter one, where any phenomenon which

would not be totally impossible could ultimately take place. In particular, nucleation of a Coleman-De Luccia bubble with another de Sitter space in its interior would be made possible. Regarding the resulting spacetime, we have studied in this case whether a foliation in terms of CMC hypersurfaces might cover the existence of most observers in our part of spacetime, which would depend on the parameters of the used model. We have suggested another CMC foliation which could be studied in more detail and we have included an argument which could help us to find other foliations of this kind, if it is in general valid. That argument establishes that the intersection of two hypersurfaces with CMC produces a hypersurface, with lower dimension, which would also have CMC when considering this resulting hypersurface defined in the spacetime given by one of the original hypersurfaces.

On the other hand, considering phantom energy with a generalized Chaplygin gas equation of state, we have corroborated that phantom energy must not necessarily take the universe to a big rip singularity. Depending on the values of the parameters on the equation of state, the future of the universe could be either regular, asymptotically de Sitter, or singular. We have called that new singularity the big freeze, because in this case the universe would suffer a doomsday at a finite and non-vanish value of the scale factor, being infinitely filled by phantom energy. This doomsday could also be avoided by a big trip.

We have showed that a universe filled with dark energy having a constant  $w$  would change its evolution if we consider that this universe appears in a model inspired in a Randall-Sundrum type 1 scenario. In this case, the number of singularities is doubled, both if  $w > -1$  and  $w < -1$ , being therefore the cosmic evolution divided in three isolated regions. The fluid in the intermediate region has a negative energy density, keeping the effective energy density in the brane positive definite. We have called this fluid with negative energy density and  $w > -1$  ( $w < -1$ ) dual dark (phantom) energy. If one considers the limit in which the brane tension is infinitely large, then the brane effects vanishes and one recovers the behaviour of the 4-dimensional models with  $w$  constant.

Considering this scenario filled with dual phantom generalized Chaplygin gas, we recover the same future behaviors as in the phantom generalized Chaplygin gas cases, though such behaviours could be different in the past.

In the considered 5-dimensional models, the evolution of black- and worm-holes is different from the corresponding evolution in 4-dimensional models. In the cases with constant  $w$ , we obtain that the sizes of these objects diverge many times. In the models filled with dual phantom generalized Chaplygin gas which present a future big freeze singularity, this singularity is not avoided by a big trip through a wormhole, though

these universes could be engulfed by a black hole.

The multiplication of the number of singularities would not be a exclusive consequence of brane models, in the case that this phenomenon would take place. If we consider that the dark energy is composed of two parts, a dynamic one with constant equation of state parameter and a negative cosmological constant, then the resulting model present infinite number of singularities, which divide the evolution of the universe in infinite identical regions. This framework can be interpreted as a classical multiverse, which could be able to describe the current accelerated expansion of our universe if the dynamic component is phantom energy. The consideration of one of these isolated universes referred to an infinite cosmic time could imply interesting characteristics.

We have showed that, in order to provide some regions with a well defined physical meaning in models which present different regions of evolution, the equation of state parameter must be discretized. This discretization could ultimately possess a more fundamental meaning, implying the discretization of the dynamic quantities of the model.

The initial assumption of this thesis, by which we consider that the physical frame is the Einstein frame, is not meaningless. Although it is well known that this frame is mathematically equivalent to the Jordan frame, we have proved that this equivalence lacks in physical character.

It is worth noticing that the singularities of the considered models would be probably smoothed by some quantum treatment, so disappearing, therefore, the pure classical world. This treatment would be necessary regardless of the value of the scale factor at the singularity.

On the other hand, we have also studied the thermal radiation of the constructions which could be the most natural astronomical objects in phantom scenarios: the wormholes. We have been able to derive three laws of wormhole dynamics, at least in a tentative way, by interpreting the thermal radiation, which should be necessarily obtained by using local considerations, as having phantom nature.

The dynamic evolution of wormholes may be affected by their thermal radiation. Whereas black holes would reach a state where they tend to disappear in a universe with  $w > -1$ , this would not be the case for wormholes in a phantom universe, where there is an inexhaustible amount of phantom energy to be accreted by them. Nevertheless, the thermal radiation of wormholes would slow their increase down, probably not in a so abrupt way as for avoiding the occurrence of the big trip, in the models that predict this phenomenon.

Finally, we want to emphasize that in a universe containing both phantom energy

and any kind of energy which fulfills the null energy condition, whether it is usual matter or not, the evolution of the universe itself would lead to the phantom energy dominance, if this energy does not decay in another kind of stuff. Therefore, it would be enough for a universe to have a phantom component in order to have a future governed by this fluid. In this case, the time in which black holes could be considered as the most common astronomical objects would finish at some moment, possibly starting a period of wormholes dominance.



# Bibliografía

- [1] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, [astro-ph/9805201](#).
- [2] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, [astro-ph/9812133](#).
- [3] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [4] R. R. Caldwell, “A phantom menace?,” *Phys. Lett.* **B545** (2002) 23–29, [astro-ph/9908168](#).
- [5] A. A. Starobinsky, “Future and origin of our universe: Modern view,” *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 157–163, [astro-ph/9912054](#).
- [6] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. Weinberg, “Phantom energy and cosmic doomsday,” *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 071301, [astro-ph/0302506](#).
- [7] M. Bouhmadi-Lopez and J. A. Jimenez Madrid, “Escaping the big rip?,” *JCAP* **0505** (2005) 005, [astro-ph/0404540](#).
- [8] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, “Wormholes, time machines, and the weak energy condition,” *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1446–1449.
- [9] S. V. Sushkov, “Wormholes supported by a phantom energy,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 043520, [gr-qc/0502084](#).
- [10] F. S. N. Lobo, “Phantom energy traversable wormholes,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 084011, [gr-qc/0502099](#).
- [11] F. S. N. Lobo, “Chaplygin traversable wormholes,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 064028, [gr-qc/0511003](#).
- [12] E. Babichev, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, “The accretion of dark energy onto a black hole,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **100** (2005) 597–609,

- astro-ph/0505618.
- [13] P. F. Gonzalez-Diaz, “Achronal cosmic future,” *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 071301, astro-ph/0404045.
  - [14] E. Babichev, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, “Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion,” *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 021102, gr-qc/0402089.
  - [15] P. Martin-Moruno, J. A. Jimenez Madrid, and P. F. Gonzalez-Diaz, “Will black holes eventually engulf the universe?,” *Phys. Lett.* **B640** (2006) 117–120, astro-ph/0603761.
  - [16] P. Martin-Moruno, “On the formalism of dark energy accretion onto black- and worm-holes,” *Phys. Lett.* **B659** (2008) 40–44, 0709.4410 [astro-ph].
  - [17] P. Martin-Moruno, A.-E. L. Marrakchi, S. Robles-Perez, and P. F. Gonzalez-Diaz, “Dark energy accretion onto black holes in a cosmic scenario,” *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 2797–2811, 0803.2005 [gr-qc].
  - [18] P. F. Gonzalez-Diaz and P. Martin-Moruno, “Wormholes in the accelerating universe,” in *Proceedings of the eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, H. Kleinert, R. T. Jantzen, and R. Ruffini, eds., pp. 2190–2192. World Scientific, 2008. 0704.1731 [astro-ph].
  - [19] A. V. Yurov, P. Martin-Moruno, and P. F. Gonzalez-Diaz, “New ‘big’s in cosmology,” *Nucl. Phys.* **B759** (2006) 320–341, astro-ph/0606529.
  - [20] L. Randall and R. Sundrum, “An alternative to compactification,” hep-th/9906064.
  - [21] M. Bouhmadi-Lopez, P. Martin-Moruno, and P. F. Gonzalez-Diaz, “Worse than a big rip?,” *Phys. Lett.* **B659** (2008) 1–5, arXiv:gr-qc/0612135.
  - [22] M. Bouhmadi-Lopez, P. F. Gonzalez-Diaz, and P. Martin-Moruno, “On the generalised chaplygin gas: worse than a big rip or quieter than a sudden singularity?,” *Int. J. Mod. Phys.* **D17** (2008) 2269–2290, 0707.2390 [gr-qc].
  - [23] S. Robles-Perez, P. Martin-Moruno, A. Rozas-Fernandez, and P. F. Gonzalez-Diaz, “A dark energy multiverse,” *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) F41, gr-qc/0701127.
  - [24] P. F. Gonzalez-Diaz, P. Martin-Moruno, and A. V. Yurov, “A graceful multiversal link of particle physics to cosmology,” *Aceptado en Grav. & Cosm.*, 0705.4347 [astro-ph].
  - [25] P. Martin-Moruno and P. F. Gonzalez-Diaz, “Lorentzian wormholes generalizes

- thermodynamics still further,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 215010, 0904.0099 [gr-qc].
- [26] P. Martin-Moruno and P. F. Gonzalez-Diaz, “Thermal radiation from lorentzian traversable wormholes,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 024007, 0907.4055 [gr-qc].
- [27] S. A. Hayward, “Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics,” *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 3147–3162, gr-qc/9710089.
- [28] S. A. Hayward, “Energy and entropy conservation for dynamical black holes,” *Phys. Rev* **D70** (2004) 104027, gr-qc/0408008.
- [29] P. F. Gonzalez-Diaz and C. L. Siguenza, “Phantom thermodynamics,” *Nucl. Phys.* **B697** (2004) 363–386, astro-ph/0407421.
- [30] E. N. Saridakis, P. F. Gonzalez-Diaz, and C. L. Siguenza, “Unified dark energy thermodynamics: varying  $w$  and the -1-crossing,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 165003, 0901.1213 [astro-ph].
- [31] S. Capozziello, R. de Ritis, C. Rubano, and P. Scudellaro, “Nöther symmetries in cosmology,” *Riv. Nuovo Cim.* **19** (1996) no. 4, 1.
- [32] S. Capozziello, P. Martin-Moruno, and C. Rubano, “Dark energy and dust matter phases from an exact  $f(r)$ -cosmology model,” *Phys. Lett.* **B664** (2008) 12–15, 0804.4340 [astro-ph].
- [33] S. Capozziello, P. Martin-Moruno, and C. Rubano, “Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames,” *Phys. Lett.* **B689** (2010) 117–121, 1003.5394 [gr-qc].
- [34] S. R. Coleman and F. De Luccia, “Gravitational effects on and of vacuum decay,” *Phys. Rev.* **D21** (1980) 3305.
- [35] **Boomerang** Collaboration, P. de Bernardis *et al.*, “A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation,” *Nature* **404** (2000) 955–959, astro-ph/0004404.
- [36] D. Huterer and M. S. Turner, “Revealing quintessence,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 081301, astro-ph/9808133.
- [37] S. Perlmutter, M. S. Turner, and M. J. White, “Constraining dark energy with sne ia and large-scale structure,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 670, astro-ph/9901052.
- [38] **WMAP** Collaboration, D. N. Spergel *et al.*, “First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters,” *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175, astro-ph/0302209.

- [39] C. L. Bennett *et al.*, “First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results,” *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 1, [astro-ph/0302207](#).
- [40] SDSS Collaboration, M. Tegmark *et al.*, “Cosmological parameters from sdss and wmap,” *Phys. Rev.* **D69** (2004) 103501, [astro-ph/0310723](#).
- [41] D. J. Mortlock and R. L. Webster, “The statistics of wide-separation lensed quasars,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **319** (2000) 872, [astro-ph/0008081](#).
- [42] **Supernova Search Team** Collaboration, J. L. Tonry *et al.*, “Cosmological results from high- $z$  supernovae,” *Astrophys. J.* **594** (2003) 1–24, [astro-ph/0305008](#).
- [43] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini, and A. A. Starobinsky, “Is there supernova evidence for dark energy metamorphosis?,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** (2004) 275, [astro-ph/0311364](#).
- [44] D. Huterer and A. Cooray, “Uncorrelated estimates of dark energy evolution,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 023506, [astro-ph/0404062](#).
- [45] S. Hannestad and E. Mortsell, “Probing the dark side: Constraints on the dark energy equation of state from cmb, large scale structure and type ia supernovae,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 063508, [astro-ph/0205096](#).
- [46] **SDSS Collaboration** Collaboration, U. Seljak *et al.*, “Cosmological parameter analysis including sdss ly-alpha forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 103515, [astro-ph/0407372](#).
- [47] S. Ho, C. Hirata, N. Padmanabhan, U. Seljak, and N. Bahcall, “Correlation of cmb with large-scale structure: I. isw tomography and implications,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 043519, [0801.0642 \[astro-ph\]](#).
- [48] T. Giannantonio, R. Scranton, R. G. Crittenden, R. C. Nichol, S. P. Boughn, A. D. Myers, and G. T. Richards, “Combined analysis of the integrated sachs-wolfe effect and cosmological implications,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 123520, [0801.4380 \[astro-ph\]](#).
- [49] B. R. Granett, M. C. Neyrinck, and I. Szapudi, “A map of the integrated sachs-wolfe signal from luminous red galaxies,” *Astrophys. J.* **701** (2009) 414–422, [0812.1025 \[astro-ph\]](#).
- [50] “Nasa: Wmap cosmological parameters.”  
<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm>.
- [51] “Large synoptic survey telescope.”

<http://www.lsst.org/lsst/science/scientist>.

- [52] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, “Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state,” *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1582–1585, [astro-ph/9708069](#).
- [53] C. Wetterich, “Cosmology and the fate of dilatation symmetry,” *Nucl. Phys.* **B302** (1988) 668.
- [54] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “Cosmology with a time variable cosmological constant,” *Astrophys. J.* **325** (1988) L17.
- [55] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga, “Cosmology with ultralight pseudo nambu-goldstone bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2077–2080, [astro-ph/9505060](#).
- [56] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, “A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration,” *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4438–4441, [astro-ph/0004134](#).
- [57] J. K. Erickson, R. R. Caldwell, P. J. Steinhardt, C. Armendariz-Picon, and V. F. Mukhanov, “Measuring the speed of sound of quintessence,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 121301, [astro-ph/0112438](#).
- [58] B. McInnes, “The ds/cft correspondence and the big smash,” *JHEP* **08** (2002) 029, [hep-th/0112066](#).
- [59] S. M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden, “Can the dark energy equation-of-state parameter be less than -1?,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 023509, [astro-ph/0301273](#).
- [60] J. M. Cline, S.-Y. Jeon, and G. D. Moore, “The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 043543, [hep-ph/0311312](#).
- [61] P. F. Gonzalez-Diaz, “K-essential phantom energy: Doomsday around the corner?,” *Phys. Lett.* **B586** (2004) 1–4, [astro-ph/0312579](#).
- [62] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “The final state and thermodynamics of dark energy universe,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 103522, [hep-th/0408170](#).
- [63] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, “An alternative to quintessence,” *Phys. Lett.* **B511** (2001) 265–268, [gr-qc/0103004](#).
- [64] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, “Generalized chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter unification,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 043507, [gr-qc/0202064](#).

- [65] O. Bertolami, A. A. Sen, S. Sen, and P. T. Silva, “Latest supernova data in the framework of generalized chaplygin gas model,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353** (2004) 329, [astro-ph/0402387](#).
- [66] H. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga, and I. Waga, “The end of unified dark matter?,” *Phys. Rev.* **D69** (2004) 123524, [astro-ph/0212114](#).
- [67] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, “The revival of the unified dark energy - dark matter model?,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) , [astro-ph/0407239](#).
- [68] I. M. Khalatnikov, “Open static chaplygin universe,” *Phys. Lett.* **B563** (2003) 123–131.
- [69] P. F. Gonzalez-Diaz, “You need not be afraid of phantom energy,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 021303, [astro-ph/0305559](#).
- [70] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman & Co., 1973.
- [71] J. Michell, “On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. by the rev. john michell, b. d. f. r. s. in a letter to henry cavendish, esq. f. r. s. and a. s.,” *Philosophical Transactions of the Royal Society* **74** (1784) 35–57.
- [72] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. D. Wiss.* (1916) 189–196.
- [73] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, “On continued gravitational contraction,” *Phys. Rev.* **56** (1939) 455–459.
- [74] D. Finkelstein, “Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle,” *Phys. Rev.* **110** (1958) 965–967.
- [75] C. Fronsdal, “Completion and embedding of the schwarzschild solution,” *Phys. Rev.* **116** (1959) 778–781.
- [76] M. D. Kruskal, “Maximal extension of schwarzschild metric,” *Phys. Rev.* **119** (1960) 1743–1745.
- [77] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities,” *Phys. Rev. Lett.* **14** (1965) 57–59.
- [78] R. Penrose, “Gravitational Collapse: The Role of General Relativity,” *Riv. Nuovo Cimento* (1969) no. 1, special number, 252–276.

- 
- [79] R. Penrose, “Singularities and time-asymmetry,” in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking and W. Israel, eds., pp. 581–638. Cambridge University Press, 1979.
- [80] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237–238.
- [81] H. Reissner, “Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie,” *Annalen der Physik* **50** (1916) 106–120.
- [82] G. Nordström, “On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory,” *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **26** (1918) 1201–1208.
- [83] E. Newman and J. Allen, “Note on the Kerr Spinning-Particle Metric,” *Journal of Mathematical Physics* **6** (1965) 915–917.
- [84] E. Newman and col., “Metric of a Rotating, Charged Mass,” *Journal of Mathematical Physics* **6** (1965) 918–919.
- [85] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [86] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1344–1346.
- [87] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [88] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.
- [89] T. Jacobson, “Primordial black hole evolution in tensor scalar cosmology,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 2699–2702, [astro-ph/9905303](#).
- [90] R. Bean and J. Magueijo, “Could supermassive black holes be quintessential primordial black holes?,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 063505, [astro-ph/0204486](#).
- [91] A. V. Frolov and L. Kofman, “Inflation and de sitter thermodynamics,” *JCAP* **0305** (2003) 009, [hep-th/0212327](#).
- [92] A. Einstein and N. Rosen, “The particle problem in the general theory of relativity,” *Phys. Rev.* **48** (1935) 73–77.
- [93] L. Flamm, “Beiträge zur einsteinschen gravitationstheorie,” *Physik. Zeitschr.* **17** (1916) 448–454.
- [94] J. A. Wheeler, “Geons,” *Phys. Rev.* **97** (1955) 511–536.
- [95] C. W. Misner and J. A. Wheeler, “Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty

- space,” *Annals Phys.* **2** (1957) 525–603.
- [96] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, “Causality and multiply connected space-time,” *Phys. Rev.* **128** (1962) 919–929.
- [97] E. G. Ellis, “Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity,” *J. Math. Phys.* **14** (1973) 104–118.
- [98] K. A. Bronnikov, “Scalar-tensor theory and scalar charge,” *Acta Phys. Polon.* **B4** (1973) 251–266.
- [99] T. Kodama, “General relativistic nonlinear field: A kink solution in a generalized geometry,” *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3529–3534.
- [100] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. American Institute of Physics Press (Woodbury, New York), 1995.
- [101] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *Am. J. Phys.* **56** (1988) 395–412.
- [102] S. W. Hawking, “Chronology protection conjecture,” *Phys. Rev.* **D46** (1992) 603–611.
- [103] L.-X. Li, “New light on time machines: Against the chronology protection conjecture,” *Phys. Rev.* **D50** (1994) 6037–6040.
- [104] M. Visser, “Traversable wormholes: The roman ring,” *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5212–5214, [gr-qc/9702043](#).
- [105] L.-X. Li and I. Gott, J. R., “A self-consistent vacuum for misner space and the chronology protection conjecture,” *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2980, [gr-qc/9711074](#).
- [106] M. Visser, “The quantum physics of chronology protection,” in *The future of theoretical physics and cosmology*, G. Gibbons, S. Rankine, and P. Shellard, eds., pp. 161–176. 2002. [gr-qc/0204022](#).
- [107] T. A. Roman, “Inflating lorentzian wormholes,” *Phys. Rev.* **D47** (1993) 1370–1379, [gr-qc/9211012](#).
- [108] P. F. Gonzalez-Diaz, “Wormholes and ringholes in a dark-energy universe,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 084016, [astro-ph/0308382](#).
- [109] R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, “The Physics of Cosmic Acceleration,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** (2009) 397–429, 0903.0866 [[astro-ph.CO](#)].
- [110] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$  theories,” 1002.4928 [[gr-qc](#)].



- 
- [111] R. Maartens, “Brane-world gravity,” *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 7, [arXiv:gr-qc/0312059](#).
- [112] P. Brax, C. van de Bruck, and A. C. Davis, “Brane world cosmology,” *Rept. Prog. Phys.* **67** (2004) 2183–2232, [hep-th/0404011](#).
- [113] S. Capozziello and M. Funaro, “Le Teorie Estese della Gravitazione,” in *Introduzione alla Relatività Generale*. Liguori Editore, 2005.
- [114] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [115] G. Magnano and L. M. Sokolowski, “On Physical Equivalence Between Nonlinear Gravity Theories And A General Relativistic Selfgravitating Scalar Field,” *Phys. Rev.* **D50** (1994) 5039–5059, [gr-qc/9312008](#).
- [116] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370, [hep-ph/9905221](#).
- [117] S. A. Hayward, “General laws of black hole dynamics,” *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6467–6474.
- [118] B. J. Carr and S. W. Hawking, “Black holes in the early Universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **168** (1974) 399–415.
- [119] P. F. Gonzalez-Diaz, “On the accretion of phantom energy onto wormholes,” *Phys. Lett.* **B632** (2006) 159–161, [astro-ph/0510771](#).
- [120] P. F. Gonzalez-Diaz, “Some notes on the big trip,” *Phys. Lett.* **B635** (2006) 1–6, [hep-th/0607137](#).
- [121] F. C. Michel, “Accretion of matter by condensed objects,” *Astrophys. Sp. Sc.* **15** (1972) 153–160.
- [122] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoría clásica de los campos*, vol. 2 of *Curso de física teórica*. Editorial Reverté, S. A., segunda edición ed., 1973.
- [123] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, And Particle Creation,” *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2738–2751.
- [124] S. A. Hayward, “Dynamics of black holes,” [0810.0923 \[gr-qc\]](#).
- [125] J. Podolsky, “The structure of the extreme Schwarzschild-de Sitter space-time,” *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 1703–1725, [gr-qc/9910029](#).
- [126] P. F. Gonzalez-Diaz and J. A. Jimenez-Madrid, “Phantom inflation and the ‘big trip’,” *Phys. Lett.* **B596** (2004) 16–25, [hep-th/0406261](#).
- [127] J. A. Jimenez Madrid, “Chaplygin gas may prevent big trip,” *Phys. Lett.* **B634**

- (2006) 106–110, [astro-ph/0512117](#).
- [128] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Path integral derivation of black hole radiance,” *Phys. Rev.* **D13** (1976) 2188–2203.
  - [129] V. Faraoni and W. Israel, “Dark energy, wormholes, and the Big Rip,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 064017, [gr-qc/0503005](#).
  - [130] V. Faraoni, “No ‘big trips’ for the universe,” *Phys. Lett* **B647** (2007) 309–312, [gr-qc/0702143](#).
  - [131] C. Gao, X. Chen, V. Faraoni, and Y. G. Shen, “Does the mass of a black hole decrease due to the accretion of phantom energy,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 024008, [0802.1298 \[gr-qc\]](#).
  - [132] E. Babichev, S. Chernov, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, “Perfect fluid around black holes and naked singularities,” [0806.0916 \[gr-qc\]](#).
  - [133] L. Mersini-Houghton and A. Kelleher, “Probing Dark Energy with Black Hole Binaries,” [0808.3419 \[gr-qc\]](#).
  - [134] L. Mersini-Houghton and A. Kelleher, “Investigating Dark Energy with Black Hole Binaries,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **194** (2009) 272–277, [0906.1563 \[gr-qc\]](#).
  - [135] D. L. Wolffe, *Symposium on Basic Research*, p. 66. 1959.
  - [136] P. F. Gonzalez-Diaz, “Holographic cosmic energy, fundamental theories and the future of the Universe,” *Grav. Cosmol.* **12** (2006) 29–36, [astro-ph/0507714](#).
  - [137] D. Wands, “Brane-world cosmology,” in *Proceedings of the 28th Spanish Relativity Meeting*, vol. 841, pp. 228–243. 2006. [gr-qc/0601078](#).
  - [138] L. P. Chimento and R. Lazkoz, “Duality extended Chaplygin cosmologies with a big rip,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 3195, [astro-ph/0505254](#).
  - [139] W. Israel, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,” *Nuovo Cim.* **B44S10** (1966) 1.
  - [140] V. Gorini, A. Kamenshchik, and U. Moschella, “Can the chaplygin gas be a plausible model for dark energy?,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 063509, [astro-ph/0209395](#).
  - [141] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, “Unification of dark matter and dark energy: The inhomogeneous chaplygin gas,” *Phys. Lett.* **B535** (2002) 17–21, [astro-ph/0111325](#).
  - [142] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, “Generalized chaplygin gas and cmb constraints,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 063003, [astro-ph/0210468](#).

- 
- [143] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, “Wmap constraints on the generalized chaplygin gas model,” *Phys. Lett.* **B575** (2003) 172–180, [astro-ph/0303538](#).
- [144] O. Bertolami, “Challenges to the generalized chaplygin gas cosmology,” [astro-ph/0403310](#).
- [145] I. S. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1994.
- [146] A. A. Sen and R. J. Scherrer, “Generalizing the generalized Chaplygin gas,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 063511, [astro-ph/0507717](#).
- [147] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Tsujikawa, “Properties of singularities in (phantom) dark energy universe,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 063004, [hep-th/0501025](#).
- [148] C. Cattoen and M. Visser, “Necessary and sufficient conditions for big bangs, bounces, crunches, rips, sudden singularities, and extremality events,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 4913–4930, [gr-qc/0508045](#).
- [149] L. Fernandez-Jambrina and R. Lazkoz, “Classification of cosmological milestones,” *Phys. Rev.* **D74** (2006) 064030, [gr-qc/0607073](#).
- [150] H. Everett III, J. A. Wheeler, and B. S. DeWitt in *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*, B. S. DWitt and N. Graham, eds. Princeton University Press, 1973.
- [151] L. Susskind, “The Anthropic landscape of string theory,” in *Universe or multiverse?*, B. Carr, ed. Cambridge Univ. Press, 2007. [hep-th/0302219](#).
- [152] A. D. Linde, “Eternal Chaotic Inflation,” *Mod. Phys. Lett* **A1** (1986) 81.
- [153] F. Wilczek, “Analysis and synthesis III: Cosmic groundwork,” *Phys. Today* (2003) .
- [154] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1–23.
- [155] J. J. Halliwell, J. Perez-Mercader, and W. H. Zurek, eds., *The physical origin of time asymmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [156] T. Banks, “Cosmological breaking of supersymmetry or little Lambda goes back to the future. II,” [hep-th/0007146](#).
- [157] E. Witten, “Quantum gravity in de Sitter space,” [arXiv:hep-th/0106109](#). Prepared for International School of Subnuclear Physics: 39th Course: New Fields and Strings in Subnuclear Physics.

- [158] S. Hellerman, N. Kaloper, and L. Susskind, “String theory and quintessence,” *JHEP* **0106** (2001) 003, [hep-th/0104180](#).
- [159] X.-G. He, “Accelerating Universe and Event Horizon,” [astro-ph/0105005](#).
- [160] M. Bouhmadi-Lopez, C. Kiefer, B. Sandhofer, and P. V. Moniz, “On the quantum fate of singularities in a dark-energy dominated universe,” *Phys. Rev.* **D79** (2009) 124035, [0905.2421 \[gr-qc\]](#).
- [161] J. G. Cramer, R. L. Forward, M. S. Morris, M. Visser, G. Benford, and G. A. Landis, “Natural wormholes as gravitational lenses,” *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3117–3120, [astro-ph/9409051](#).
- [162] D. F. Torres, G. E. Romero, and L. A. Anchordoqui, “Might some gamma ray bursts be an observable signature of natural wormholes?,” *Phys. Rev.* **D58** (1998) 123001, [astro-ph/9802106](#).
- [163] D. F. Torres, G. E. Romero, and L. A. Anchordoqui, “Wormholes, gamma ray bursts and the amount of negative mass in the universe,” *Mod. Phys. Lett.* **A13** (1998) 1575–1582, [gr-qc/9805075](#).
- [164] M. Safonova, D. F. Torres, and G. E. Romero, “Microlensing by natural wormholes: Theory and simulations,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 023001, [gr-qc/0105070](#).
- [165] M. Safonova, D. F. Torres, and G. E. Romero, “Macrolensing signatures of large-scale violations of the weak energy condition,” *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 153–162, [astro-ph/0104075](#).
- [166] A. Shatskiy, “Passage of Photons Through Wormholes and the Influence of Rotation on the Amount of Phantom Matter around Them,” *Astron. Rep.* **51** (2007) 81.
- [167] A. Shatskiy, “Image of another universe being observed through a wormhole throat,” [0809.0362 \[astro-ph\]](#).
- [168] P. F. Gonzalez-Diaz, “Is the 2008 NASA/ESA double Einstein ring actually a ringhole signature?,” [1001.3778 \[astro-ph.CO\]](#).
- [169] S. A. Hayward, “Gravitational energy in spherical symmetry,” *Phys. Rev.* **D53** (1996) 1938–1949, [gr-qc/9408002](#).
- [170] S. A. Hayward, “Dynamic wormholes,” *Int. J. Mod. Phys* **D8** (1999) 373–382, [gr-qc/9805019](#).
- [171] S. A. Hayward, “Wormhole dynamics in spherical symmetry,” *Phys. Rev.* **D79** (2009) 124001, [0903.5438 \[gr-qc\]](#).

- 
- [172] F. S. N. Lobo, “Exotic solutions in General Relativity: Traversable wormholes and ‘warp drive’ spacetimes,” 0710.4474 [gr-qc].
- [173] C. W. Misner and D. H. Sharp, “Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse,” *Phys. Rev.* **B136** (1964) 571–576.
- [174] S. A. Hayward, “Quasilocal Gravitational Energy,” *Phys. Rev.* **D49** (1994) 831–839, gr-qc/9303030.
- [175] H. Kodama, “Conserved Energy Flux For The Spherically Symmetric System And The Back Reaction Problem In The Black Hole Evaporation,” *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980) 1217.
- [176] D. Ida and S. A. Hayward, “How much negative energy does a wormhole need?,” *Phys. Lett.* **A260** (1995) 175–181, gr-qc/9905033.
- [177] S. A. Hayward, R. Di Criscienzo, L. Vanzo, M. Nadalini, and S. Zerbini, “Local Hawking temperature for dynamical black holes,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 062001, 0806.0014 [gr-qc].
- [178] M. Visser, “Essential and inessential features of hawking radiation,” *Int. J. Mod. Phys.* **D12** (2003) 649–661, hep-th/0106111.
- [179] R. Di Criscienzo, S. A. Hayward, M. Nadalini, L. Vanzo, and S. Zerbini, “Hamilton-Jacobi tunneling method for dynamical horizons in different coordinate gauges,” *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 015006.
- [180] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Rev. Rel.* **9** (2005) 3, gr-qc/0510072.
- [181] S. Capozziello and M. Francaviglia, “Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications,” *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 357–420, 0706.1146 [astro-ph].
- [182] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, “Reconciling dark energy models with  $f(R)$  theories,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 043503, astro-ph/0501426.
- [183] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Newton law corrections and instabilities in  $f(R)$  gravity with the effective cosmological constant epoch,” *Phys. Lett.* **B652** (2007) 343–348, 0706.1378 [hep-th].
- [184] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and A. Troisi, “Cosmological viability of  $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase,” *Phys. Lett.* **B639** (2006) 135–143, astro-ph/0604431.
- [185] E. E. Flanagan, “The conformal frame freedom in theories of gravitation,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 3817, gr-qc/0403063.

- [186] S. Capozziello and R. de Ritis, “Nonminimal coupling and matter cosmologies,” *Phys. Lett A* **195** (1994) 48–52.
- [187] E. E. O. Ishida, R. R. R. Reis, A. V. Toribio, and I. Waga, “When did cosmic acceleration start? How fast was the transition?,” *Astropart. Phys.* **28** (2008) 547–552, 0706.0546 [astro-ph].
- [188] J. V. Cunha and J. A. S. Lima, “Transition Redshift: New Kinematic Constraints from Supernovae,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **390** (2008) 210–217, 0805.1261 [astro-ph].
- [189] S. Capozziello, R. de Ritis, and A. A. Marino, “Some aspects of the cosmological conformal equivalence between the ‘Jordan frame’ and the ‘Einstein frame’.,” *Class. Quant. Grav.* **14** (1997) 3243–3258, gr-qc/9612053.
- [190] S. Capozziello, E. Piedipalumbo, C. Rubano, and P. Scudellaro, “Testing an exact  $f(r)$ -gravity model at galactic and local scales,” 0906.5430 [gr-qc].
- [191] L. Pogosian and A. Silvestri, “The pattern of growth in viable  $f(R)$  cosmologies,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 023503, arXiv:0709.0296 [astro-ph].
- [192] J. Earman, “Lambda: The Constant That Refuses to Die,” *Arch. Hist. Exact Sci.* **55** (2001) 189–220.
- [193] E. Harrison, *Cosmology*. Cambridge University Press, 2nd ed., 2000.
- [194] K. Brecher and J. Silk, “Lemaître Universe, Galaxy Formation and Observations,” *Astrophysical Journal* **158** (1969) 91–102.
- [195] V. Petrosian, E. Salpeter, and P. Szekeres, “Quasi-Stellar Objects in Universes with Non-Zero Cosmological Constant,” *Astrophys. J.* **147** (1967) 1222.
- [196] J. E. Gunn and B. M. Tinsley, “An accelerating Universe,” *Nature* **257** (1975) 454–457.
- [197] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The Cosmological constant,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992) 499–542.
- [198] S. M. Carroll, “The cosmological constant,” *Living Rev. Rel.* **4** (2001) 1, astro-ph/0004075.
- [199] I. Zlatev, L.-M. Wang, and P. J. Steinhardt, “Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant,” *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 896–899, astro-ph/9807002.
- [200] S. Weinberg, “The cosmological constant problems,” in *Proceedings of the 4th International Symposium on Sources and Detection of Dark Matter in the Universe*, pp. 18–26. 2000. astro-ph/0005265.

- 
- [201] A. D. Linde and A. Mezhlumian, “Inflation with  $\Omega \neq 1$ ,” *Phys. Rev.* **D52** (1995) 6789–6804, [astro-ph/9506017](#).
- [202] A. Linde, “The Self-Reproducing Inflationary Universe,” *Scientific American* (Nov., 1994) 51.
- [203] J. Garriga and A. Vilenkin, “Recycling universe,” *Phys. Rev.* **D57** (1998) 2230–2244, [astro-ph/9707292](#).
- [204] K. M. Lee and E. J. Weinberg, “Decay of the true vacuum in curved space-time,” *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1088.
- [205] L. Dyson, M. Kleban, and L. Susskind, “Disturbing Implications of a Cosmological Constant,” *JHEP* **0210** (2002) 011, [hep-th/0208013](#).
- [206] D. N. Page, “Is our universe likely to decay within 20 billion years?,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 063535, [hep-th/0610079](#).
- [207] D. Overbye, “Big Brain Theory: Have Cosmologist Lost Theirs?,” *New York Times* (15 Jan., 2008) .
- [208] D. N. Page, “Cosmological Measures without Volume Weighting,” *JCAP* **0810** (2008) 025, [0808.0351 \[hep-th\]](#).
- [209] J. W. York, “Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation,” *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 1082–1085.
- [210] S. J. Parke, “Gravity and the decay of the false vacuum,” *Phys. Lett.* **B121** (1983) 313.
- [211] V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, “Thin wall vacuum domains evolution,” *Phys. Lett.* **B120** (1983) 91.